Graphisch-mechanische Methode

zur

Auflösung

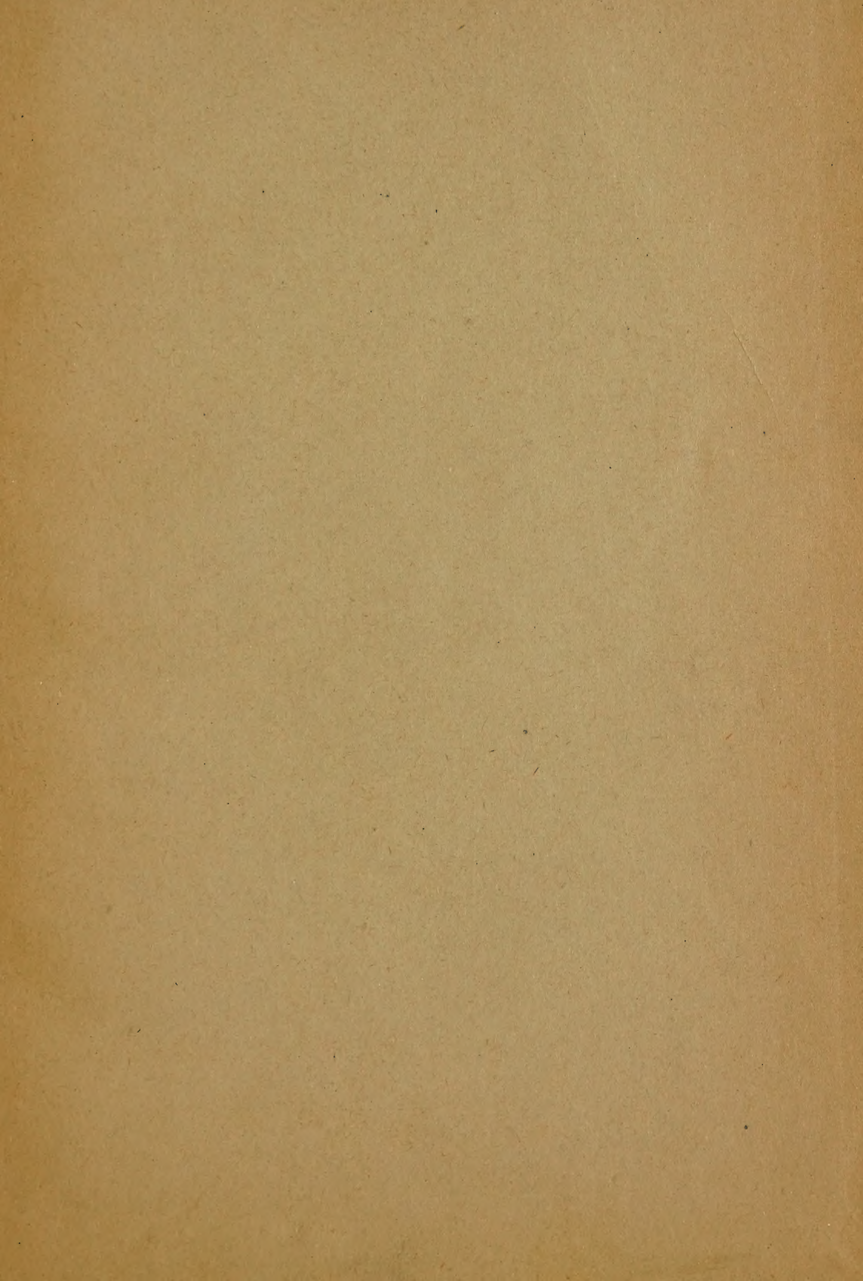
der

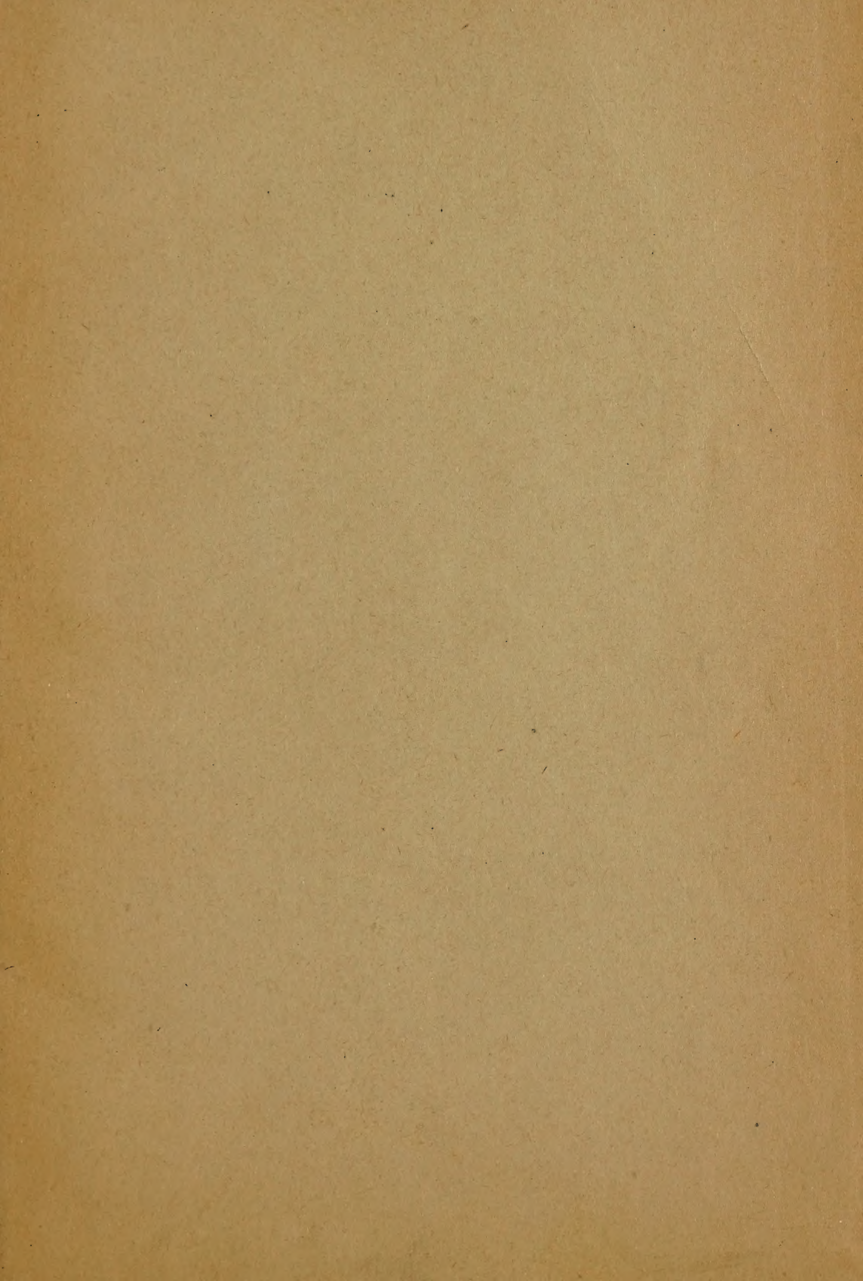
numerischen Gleichungen

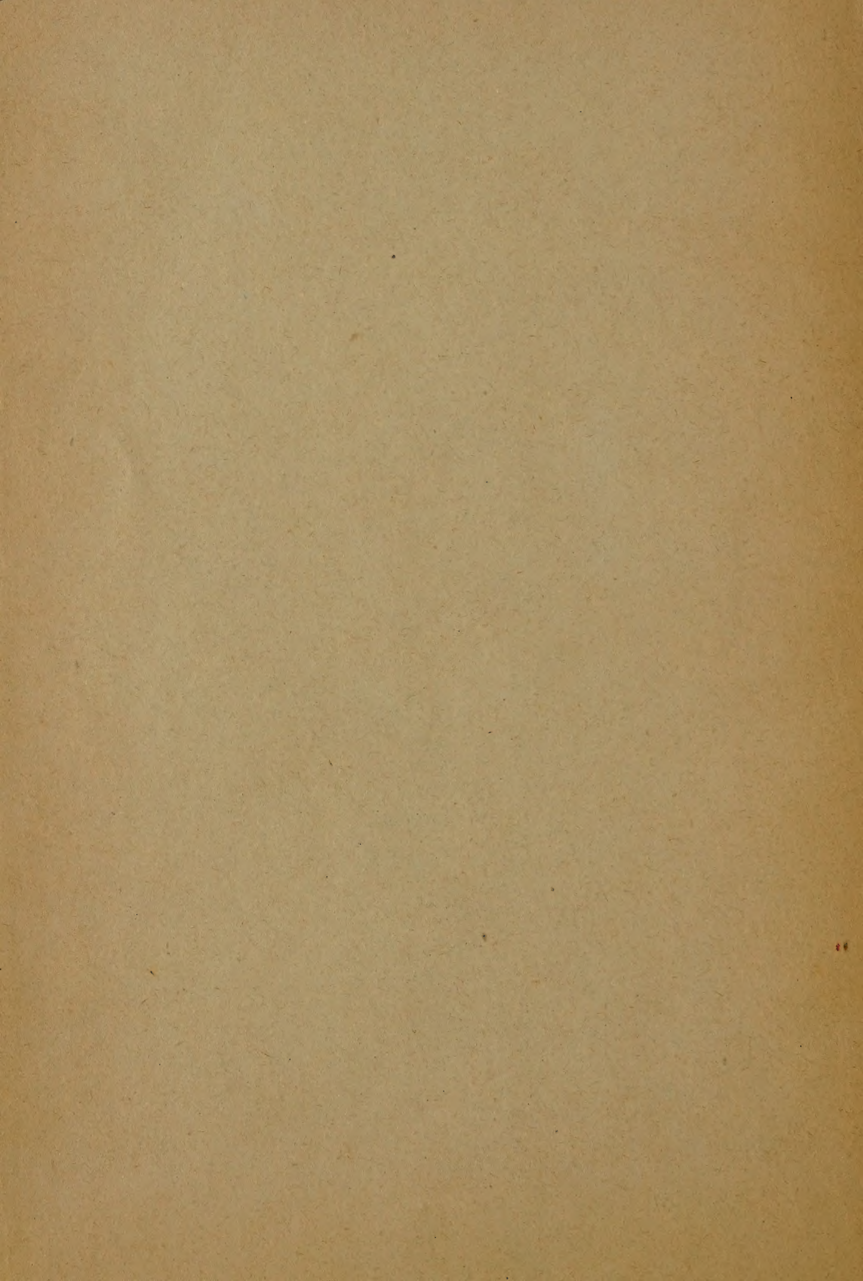
von

Dr. C. Reuschle,
Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart.

Stuttgart.
Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.
1884.







Graphisch-mechanische Methode

zur

Auflösung

der

numerischen Gleichungen

von

Dr. C. Reuschle,

Professor an der technischen Hochschule in Stuttgart.

Stuttgart.

Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung.

1884.

Vorwort.

Beschäftigt mit Untersuchungen über die algebraischen Kurven *) habe ich ein sehr einfaches Verfahren gefunden, die numerischen Gleichungen auf graphisch-mechanischem Weg aufzulösen. Diese Methode, die ich seit einem halben Jahr verwende und die auch sonst einen anschaulichen Einblick in die Theorie der Gleichungen zu gewähren geeignet ist, erscheint mir zur Auflösung numerischer Gleichungen so vorteilhaft, dass ich wohl hoffen darf, mit deren Veröffentlichung nicht allein dem Mathematiker, sondern auch dem Techniker einen Dienst zu erweisen. In der Einleitung ist das Wesen derselben in allgemeinen Umrissen und Zügen dargestellt, zum besseren Verständniss derselben dürfte es sich empfehlen, zuerst die Seiten 10 bis 17 des ersten Abschnitts durchzulesen.

Wer häufig kubische und höhere Gleichungen näherungsweise aufzulösen hat, kennt den zu ihrer Berechnung notwendigen unverhältnissmässigen Zeitaufwand, und wird sicher eine Methode, die denselben auf wenige Minuten reducirt, willkommen heissen: er stellt die Pauspapier-Parabel resp. Parabelschar über der auf Millimeterpapier gezeichneten Hyperbelschar ein und liest sofort alle reellen Wurzeln der Gleichung auf 2 bis 3 Stellen ab. Die

*) Eine hierauf bezügliche Schrift des Verfassers unter dem Titel: „Die Praxis der Kurvendiskussion“ wird im Laufe dieses Jahres im Verlag der J. B. Metzlerschen Buchhandlung erscheinen.

hiezu nötigen Kurven und Kurvenscharen kann sich der Leser nach Anleitung im Text leicht selbst anfertigen*). Genaue Kurventafeln, welche für die Gleichungen der einzelnen Grade die günstigsten Resultate liefern, werde ich im Bedürfnissfall als Supplement erscheinen lassen.

Seiner praktischen Bestimmung gemäss erläutert vorliegendes Schriftchen die verschiedenen aus dem Princip der Faktoren-Absonderung — welches auch die Einteilung bestimmt hat — hervorgehenden Methoden zur graphisch-mechanischen Auflösung der Gleichungen mit Bevorzugung derjenigen, welche praktisch bessere Resultate geben. Theoretische Auseinandersetzungen finden sich gelegentlich eingestreut; die Entwicklung einer Reihe weiterer theoretischer Gesichtspunkte, welche über das Wesen der algebraischen Gleichungen Licht zu verbreiten geeignet sein dürften, bleibt einer späteren Veröffentlichung vorbehalten.

*) Statt Pauspapier kann ich nunmehr das vorzüglich durchscheinende Gelatine-Papier empfehlen, auf welches ich erst während der Drucklegung aufmerksam geworden bin. Die Parabel bezw. Parabelschar wird auf dasselbe eingeritzt und mit Farbenstaub eingerieben, wobei es von Vorteil ist, eine andere Farbe zu wählen als für die Kurven des Millimeterpapiers.

Stuttgart im März 1884.

Der Verfasser.

Einleitung.

Wesen der Methode.

Die numerischen Gleichungen III., IV. und V. Grades mit einer Unbekannten x lassen sich graphisch-mechanisch in sehr einfacher und rasch zum Ziele führender Weise auflösen durch Parallelverschiebung einer auf Pauspapier gezeichneten binomischen*) Parabel (resp. Parabelschar) II. Ordnung über einer auf Millimeterpapier gezeichneten binomischen (resp. trinomischen) Hyperbelschar II., III. und IV. Ordnung; sämtliche reellen Wurzeln ergeben sich als Abscissen der Schnittpunkte der Parabel mit der betreffenden Hyperbel der Schar. Sobald also die drei nötigen Hyperbelscharen, sowie die Pauspapier-Parabel und -Parabelschar ein für allemal gezeichnet sind, so lassen sich mittelst dieses Apparates sofort durch eine einfache Einstellung der Parabel sämtliche reellen Wurzeln einer beliebigen numerischen Gleichung III., IV. und V. Grades ablesen. Für die quadratischen Gleichungen tritt an Stelle der Hyperbelschar einfach die x-Axe des Millimeterpapiers. Das Verfahren ist für alle Gleichungen vollständig einheitlich.

Im Gegensatz zu den geometrischen oder graphisch-konstruktiven**) Methoden, bei welchen die Wurzeln mittelst

*) Unter einer binomischen Kurve sei eine solche verstanden, deren Gleichung von der Form $x^{\alpha} y^{\beta} = Const.$ ist; je nachdem α und β gleichzeichig oder ungleichzeichig sind, ist die Kurve eine binomische Hyperbel oder eine binomische Parabel.

**) cf. hierüber: Matthiessen, Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen, Leipzig 1878, S. 921 u. ff.

Zirkel und Lineal in Verbindung mit verschiedenen Kurven konstruirt werden, ist das neue Verfahren oben als ein graphisch-mechanisches bezeichnet worden, da es nur des erwähnten Apparates und in jedem einzelnen Fall weder einer Konstruktion noch im Allgemeinen einer Rechnung bedarf. Eine kleine vorbereitende Rechnung wird nur notwendig, wenn die Gleichung zu reduciren (s. Anm. S. 4) ist, oder wenn sie grössere Wurzeln hat, welche mittelst der Substitution $x = \alpha \xi$ oder $x = \frac{\xi}{\alpha}$ in den Rahmen der angefertigten Kurventafeln zu bringen sind.

Die Genauigkeit — welche natürlich durch Vergrösserung des Massstabes theoretisch beliebig gesteigert werden könnte — ist, wenn man als Einheit den Doppelcentimeter (in Doppelmillimeter geteiltes Papier ist das zweckmässigste) wählt, die der gewöhnlichen graphischen Operationen: man erhält die Wurzeln, was für die meisten praktischen Fälle ausreichen wird, annähernd auf 3 Stellen, wenn nicht ungünstige Verhältnisse eintreten. Im Allgemeinen liefern aber die Hyperbeltafeln und die Parabel günstige Schnitte; meist nur, wenn 2 oder mehrere Wurzeln der Gleichung nahe beisammen liegen, werden die Schnitte „lang“ und die Ablesung der betreffenden Wurzeln daher unsicherer, was in der Natur der Sache liegt. Ob eine vorgelegte Gleichung wirklich eine Doppelwurzel hat, was eintritt, wenn die Parabel und Hyperbel sich berühren, oder nur zwei sehr wenig verschiedene Wurzeln, ist selbstverständlich mit dem Auge nicht absolut sicher zu entscheiden; zu beachten ist aber, dass man durch das Verfahren sogleich auf solche Besonderheiten aufmerksam gemacht wird; ein einfacher Versuch durch Rechnung giebt dann die Entscheidung. Ebenso entscheidet in dem Falle, wo die abgelesene Wurzel sehr nahezu eine ganze Zahl ist, ein rascher Versuch, ob die Wurzel wirklich eine ganze Zahl ist; analog, wenn die Gleichung eine dreifache Wurzel hat, in welchem Fall Parabel und Hyperbel sich oskuliren u. s. w. Etwas ungenauer wird auch die Ablesung, wenn das Auge zwischen zwei Kurven graphisch zu interpoliren hat. Endlich wird die Genauigkeit auch verringert, wenn die oben erwähnte Substitution auszuführen ist.

Will man die abgelesenen Wurzeln genauer, so tritt das

sogenannte *Newton*'sche Verfahren zur näherungsweisen Berechnung der Wurzeln einer algebraischen Gleichung oder die *regula falsi* ein, wobei man für gewöhnlich mit einer bis zwei Korrektionsberechnungen vollständig genügende Genauigkeit erhalten wird, da ja schon die abgelesenen Wurzeln auf 2 bis 3 Stellen richtig sind. Da der Praktiker schon eine kubische Gleichung nicht nach der Formel, sondern durch Probiren löst, so bildet das graphisch-mechanische Verfahren auch eine theoretische Ergänzung zur näherungsweisen Auflösung der Gleichungen, insofern bei demselben das anfängliche Probiren vollständig wegfällt.

Das Princip nun ist: man sondere aus den drei höchsten Gliedern der Gleichung durch Klammerbildung einen quadratischen Faktor in x ab, der $= y$ gesetzt die verschobene binomische Parabel (resp. Parabelschar) II. Ordnung liefert. Wird in der Gleichung die Klammer durch y ersetzt, so stellt die erhaltene Gleichung, welche nur noch eine willkürliche Konstante enthalten darf, eine ∞^1-Schar von Hyperbeln dar. Die gegebene Gleichung kann ersetzt werden durch das simultane System der Parabel- und Hyperbel-Gleichung; die Elimination von y aus beiden liefert die gegebene Gleichung, so dass die Abscissen der reellen endlichen Schnittpunkte beider Kurven die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung sind. Da die Parabel stets von der II. Ordnung, die Hyperbel für die Gleichungen III., IV. und V. Grades resp. von der II., III. und IV. Ordnung ist, so haben die beiden Kurven resp. 4, 6 und 8 Schnittpunkte gemein, von diesen fallen aber resp. 1, 2 und 3 in den ∞fernen Punkt der y-Axe, so dass also die Anzahl der endlichen Schnittpunkte, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung liefern, wie es sein muss, resp. 3, 4 und 5 ist. Dass eben der Überschuss der Gesamtzahl der Schnittpunkte über die Zahl der ∞fernen Schnittpunkte gleich dem Grad der jeweilig gegebenen Gleichung ist, ist der Kernpunkt der Methode.

Würde die Hyperbelgleichung 2 Konstante (willkürliche Parameter) enthalten, so würde sie eine ∞^2-Schar von Hyperbeln darstellen; eine solche kann aber nicht gezeichnet werden, woraus für diesen Fall die Unmöglichkeit erwiesen ist, eine solche Gleichung

nach der graphisch-mechanischen Methode allgemein aufzulösen. Der fragliche Fall tritt ein für die Gleichung VI. Grades, nachdem dieselbe einfach reducirt*) ist. Würde man die Gleichung VI. Grades doppelt reduciren, so wäre auch sie nach dieser Methode graphisch auflösbar. Bei dreifacher Reduktion (*Jerrard*) würden auch die Gleichungen VII. Grades lösbar. Weil aber die mehrfachen Reduktionen, insbesondere für höhere Gleichungen, entschieden unpraktisch sind, da die hiezu nötigen Rechnungen an Weitläufigkeit und Umständlichkeit nichts zu wünschen übrig lassen, so kann man für die Praxis füglich davon absehen; das eben Erwähnte ist also nur theoretisch von Interesse.

Dagegen erhält man für die Gleichungen VI. Grades auch bei einfacher Reduktion eine Lösung, wenn man in der reducirten Gleichung, nachdem ein Koefficient durch Division auf 1 gebracht ist, auch noch einen zweiten Koefficienten mittelst der Substitution $x = \alpha \xi$ auf 1 bringt; die so erhaltene Gleichung heisse die ein-

*) Die allgemeinste Gleichung n^{ten} Grades mit einer Unbekannten:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \ldots\ldots + a_{n-2} x^2 + a_{n-1} x + a_n = 0$$

geht mit $x = \frac{1}{\xi}$ über in die Gleichung:

$$a_n \xi^n + a_{n-1} \xi^{n-1} + a_{n-2} \xi^{n-2} + \ldots\ldots + a_2 \xi^2 + a_1 \xi + a_0 = 0,$$

deren Wurzeln die reciproken Werte der Wurzeln der ersteren sind, die daher die Reciprokalgleichung der ersteren heissen möge (mittelst dieses Begriffs kann man z. B. sagen: eine Gleichung, welche mit ihrer Reciprokalgleichung identisch ist, ist eine reciproke Gleichung). Unter einfacher Reduktion einer Gleichung sei diejenige bekannte und einfache Transformation derselben verstanden, mittelst welcher das zweite Glied $a_1 x^{n-1}$ oder zweitletzte Gied $a_{n-1} x$ zum Verschwinden gebracht wird; die zweite dieser Transformationen wird ausgeführt, indem man die erste Transformation an der Reciprokalgleichung vornimmt. Unter doppelter Reduktion einer Gleichung sei diejenige rationale Transformation verstanden, mittelst welcher das zweite und dritte oder das zweit- und drittletzte Glied weggeschafft wird u. s. w. Im folgenden ist die Rede von der allgemeinsten Form einer Gleichung, wenn ihre sämtlichen Koefficienten mit beliebigen Werten vorhanden sind, von der allgemeinen Form, wenn der Koefficient des höchsten oder eines beliebigen anderen Gliedes durch Division auf 1 gebracht ist, ferner von der einfach reducirten, zweifach reducirten, dreifach reducirten Gleichung in dem eben angegebenen Sinn.

fach reducirte Gleichung mit zwei Einheitskoefficienten; dieselbe erfordert zu ihrer Lösung eine quatrinomische Hyperbelschar V. Ordnung auf dem Millimeterpapier. Vom theoretischen Standpunkt lässt sich hiegegen nichts einwenden, in praktischer Beziehung können sich aber Schwierigkeiten erheben. Näheres s. I, A, 5.

Bei dreifacher Reduktion auf die Form mit 2 Einheitskoefficienten würde das Verfahren theoretisch möglich bis zu den Gleichungen VIII. Grades.

Allgemein gilt: Jede Gleichung, welche sich durch Reduktion und Transformation auf eine Form bringen lässt, welche vier willkürliche Konstanten enthält, lässt sich in graphisch-mechanischer Weise mittelst zweier auf Pauspapier und Millimeterpapier gezeichneten Kurvenscharen allgemein auflösen. Zwei der Konstanten treten als Parameter der beiden Kurvenscharen, die zwei andern als die Grössen der Parallelverschiebung auf.

Sondert man aber für die Gleichungen III., IV. und V. Grades den quadratischen Faktor anstatt aus den drei höchsten aus den drei niedersten Gliedern ab, so tritt an Stelle der Hyperbelschar auf dem Millimeterpapier eine binomische resp. trinomische Parabelschar und zwar von der III., IV. und V. Ordnung. Für die quadratischen Gleichungen fallen beide Methoden zusammen, da die Gleichung überhaupt nur drei Glieder enthält.

Sondert man endlich den quadratischen Faktor aus drei aufeinanderfolgenden mittleren Gliedern ab, was bei den kubischen Gleichungen nicht, bei den Gleichungen IV. Grades auf eine, bei den Gleichungen V. Grades auf zwei Arten geschehen kann, so erhält man auf dem Millimeterpapier eine Schar von hyperbolisch-parabolischen Kurven der IV. und V. Ordnung.

Auch bei diesen beiden Methoden ist der oben genannte Überschuss gleich dem Grad der jeweiligen Gleichung. Die zwei letzten Methoden sind aber weniger praktisch, da vielfach schlechte Schnittpunkte auftreten. Doch dürfte der Umstand, dass bei der ersten Methode eine Schar von hyperbolischen, bei der zweiten eine von parabolischen, bei der dritten eine Schar von hyper-

bolisch-parabolischen Kurven auftritt, nicht ohne theoretisches Interesse sein. Dass in der That diese beiden Methoden der vorigen nachstehen, lässt sich schon daraus erschliessen, dass die Ordnung der Kurvenschar auf dem Millimeterpapier dieselbe ist, wie der Grad der Gleichung, während bei der ersten Methode die Ordnung je um eine Einheit geringer wird.

Geht man nun einen Schritt rückwärts und sondert anstatt eines quadratischen Faktors einen linearen aus zwei aufeinanderfolgenden Gliedern ab, so liefert dieser $= y$ gesetzt eine Gerade (∞^2-Schar von Geraden); diese tritt in Form eines einzustellenden Lineals an Stelle der Pauspapier-Parabel der vorigen Methode. Auf dem Millimeterpapier erhält man für die Gleichungen II., III. und IV. Grades eine Kurve (resp. Kurvenschar) von der II., III. und IV. Ordnung, welche wieder eine hyperbolische oder parabolische oder hyperbolisch-parabolische ist, je nachdem man den linearen Faktor aus den zwei höchsten oder den zwei niedersten oder aus zwei aufeinanderfolgenden mittleren Gliedern absondert. — Während die Methode mit der zu verschiebenden Parabel (resp. Parabelschar) bis zu den Gleichungen V. Grades allgemein möglich ist, ist die Methode mit dem einzustellenden Lineal nur bis zu den Gleichungen IV. Grades allgemein möglich, wenn man wieder nur die einfache Reduktion berücksichtigt.

Auf die einfach reducirte Gleichung V. Grades mit 2 Einheitskoefficienten wäre die Lineal-Methode ebenso anwendbar wie die Parabelschar-Methode auf die Gleichung VI. Grades mit 2 Einheitskoefficienten. Da man bei Absonderung eines linearen Faktors nur über 3 willkürliche Konstanten verfügen kann, so geht die Methode überall um einen Grad weniger weit als bei Absonderung eines quadratischen Faktors. Übrigens steht auch die Linealmethode an praktischer Brauchbarkeit der ersten Methode nach; sie wird daher in Folgendem nur kurz behandelt der Vollständigkeit und ihres theoretischen Interesses halber. Eben weil die Methode mit der Pauspapier-Parabel am meisten praktisch ist, ist dieselbe vorangestellt; in logischer Reihenfolge wäre sonst die Methode mit dem einzustellenden Lineal zuerst abzuhandeln.

Geht man aber einen Schritt vorwärts und sondert einen

kubischen Faktor aus 4 aufeinanderfolgenden Gliedern ab, so giebt derselbe $= y$ gesetzt die quintinomische Parabel III. Ordnung

$$y = x^3 + bx^2 + cx + d,$$

welche sich betrachten lässt als die parallel verschobene trinomische Parabel

$$y = x^3 + px.$$

Damit erhält man neue graphische Lösungen für die Gleichungen, das Verfahren reicht aber nicht weiter als das mit der binomischen Parabel und Parabelschar, da man auch hier nur über 4 willkürliche Konstanten verfügen kann.

Geht man noch einen Schritt vorwärts und sondert einen biquadratischen Faktor aus 5 aufeinanderfolgenden Gliedern ab, so gibt derselbe $= y$ gesetzt eine sextinomische Parabel IV. Ordnung:

$$y = x^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e,$$

welche sich als eine parallel verschobene quatrinomische Parabel von der Form:

$$y = x^4 + px^2 + qx$$

betrachten lässt; da diese aber zwei willkürliche Parameter enthält, also eine ∞^2-Schar von Kurven darstellt und eine solche nicht mehr gezeichnet werden kann, so ist mit der Absonderung eines biquadratischen Faktors zur graphischen Lösung der numerischen Gleichungen nichts anzufangen.

Um über einen weiteren Parameter zu verfügen, könnte man daran denken, die Pauspapier-Parabel (resp. Parabelschar) auch noch zu drehen; es ist aber sofort klar, dass dies auch nichts hilft, denn die gedrehte Parabel hat mit den Kurven des Millimeterpapiers keine ∞ fernen Punkte mehr gemein, wodurch das oben als Kernpunkt der Methode Angeführte illusorisch wird.

Geht man aber den zweiten Schritt dadurch vorwärts, dass man durch Klammerbildung zwei quadratische Faktoren aus zwei Gruppen von je drei aufeinanderfolgenden Gliedern absondert, so führt die geometrische Deutung in den Raum, und die Möglichkeit der Auflösung der Gleichungen durch graphische, in der Zeichnungsebene vorzunehmende, Operationen geht je um 2 Grade weiter. Wird der eine quadratische Faktor $= y$, der andere $= z$ gesetzt; so stellen diese Gleichungen einen hori-

zontal- beziehungsweise vertikal-projicirenden parabolischen Cylinder II. Ordnung dar; die gegebene Gleichung verwandelt sich, wenn die Klammern durch y und z ersetzt werden, in eine hyperbolische Fläche. Die Abscissen der Schnittpunkte dieser drei Flächen sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung. Wird die hyperbolische Fläche im Sinne der deskriptiven Geometrie durch ihre in Horizontal- und Vertikalprojektion gezeichneten Horizontalschnitte auf dem Millimeterpapier dargestellt, wobei z die Rolle des willkürlichen Parameters spielt, so lassen sich die reellen Wurzeln der vorgelegten Gleichung bestimmen durch Einstellung zweier Pauspapier-Parabelscharen. — Man verfügt jetzt über 6 willkürliche Konstanten: die 2 Parameter der Parabelscharen und je 2 Verschiebungsgrössen für jede Schar, so dass mittelst dieses Verfahrens alle Gleichungen, welche 6 willkürliche Konstanten enthalten, graphisch, wenigstens in theoretischer Beziehung, gelöst werden können; also: die allgemeinste Gleichung V., die allgemeine Gleichung VI., die einfach reducirte Gleichung VII. Grades, die einfach reducirte Gleichung VIII. Grades mit zwei Einheitskoefficienten; bei mehrfachen Reduktionen schreitet bei obiger Grenzannahme die Möglichkeit der Auflösung bis zu den dreifach reducirten Gleichungen X. Grades mit zwei Einheitskoefficienten fort.

Würde man statt zweier quadratischen Faktoren einen linearen und einen quadratischen Faktor absondern, so würde der eine projicirende Cylinder durch eine projicirende Ebene, also die eine parallel zu verschiebende Pauspapier-Parabelschar durch ein in der Zeichnungsebene einzustellendes Lineal ersetzt; man verfügt über 5 Konstanten, so dass diese Methode je um einen Grad weiter als die Methode der einfachen Parabelschar, und um einen Grad weniger weit als die Methode mit zwei Parabelscharen führen würde. Dies ist ein specieller Fall des vorigen; daher werden diese, sowie die sonst noch möglichen, aber gleichfalls nicht weiter führenden, Kombinationen im folgenden nur kurz berührt.

Mit der Absonderung von drei quadratischen Faktoren endlich, die zum erstenmal bei der allgemeinsten Gleichung VIII. Grades auftreten würde, führt die geometrische Deutung in den Raum von vier Dimensionen, womit die Anschauung und umsomehr die graphische Ausführung in der Ebene von selbst aufhört.

Die Raumlösungen mittelst zweier einzustellender Parabelscharen sind natürlich ziemlich komplicirter als die Lösungen mittelst Einstellung einer Parabel oder Parabelschar und daher auch wohl nicht mehr praktisch verwendbar.

Die ganze Methode ist, neben ihrer praktischen Brauchbarkeit zur raschen Auflösung der numerischen Gleichungen bis zum V. Grad incl., auch in weiterer mehrfacher Hinsicht von Interesse: Da das Verfahren geometrischer Natur ist, so ist dasselbe sehr anschaulich; viele eine numerische Gleichung betreffende Verhältnisse lassen sich gleichsam auf einen Blick überschauen; eine Reihe von Fragen und Aufgaben über Gleichungen lassen sich graphisch rasch beantworten und lösen; das Verfahren ist ein vollständig einheitliches, der Fortschritt in der Komplikation von Grad zu Grad springt klar in die Augen; bei jeder einzelnen Methode kann man sofort bestimmen, bis zu welchem Grad die Auflösbarkeit der Gleichungen möglich ist; endlich glaube ich auch sagen zu dürfen, dass das Verfahren Fingerzeige zu geben im Stande ist zur theoretischen Weiterentwicklung der allgemeinen Theorie über die Auflösung der Gleichungen höherer Grade.

Zum Schluss dieser Einleitung gebe ich noch eine kurze Rechenschaft über das bisher auf dem Gebiete der graphischen Auflösung der Gleichungen Geleistete. Die vollständigste Zusammenstellung aller hiezu angewandten Methoden ist wohl in dem oben citirten sehr verdienstvollen Werke von *Matthiessen* enthalten. Merkwürdig ist, dass hiebei immer nur von der Konstruktion der Wurzeln die Rede ist. Nirgends wird meines Wissens ein, ein für allemal angefertigter, Apparat benutzt, der mittelst einer kurzen Manipulation die reellen Wurzeln einer numerischen Gleichung direkt abzulesen gestattet und daher praktisch brauchbar wäre; es wird immer nur von Fall zu Fall konstruirt. Als Kurven werden vorzugsweise benützt die Gerade und der Kreis (als bequem konstruirbar) in Verbindung mit Parabeln, Hyperbeln, Conchoiden u. s. w. Nirgends ist, soviel ich weiss, darauf hingewiesen, dass eben die binomischen und trinomischen Kurven eine principielle Rolle bei der graphischen Auflösung der algebraischen Gleichungen spielen.

I. Absonderung eines quadratischen Faktors.

A. Absonderung eines quadratischen Faktors aus den drei höchsten Gliedern der Gleichung.

1. Die quadratische Gleichung.

Die allgemeine Gleichung II. Grades

$$(1) \qquad x^2 + bx + c = 0$$

ist das Eliminationsresultat von y aus dem simultanen System:

$$\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \quad \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + bx + c \\ y = 0 \end{array} \right\},$$

so dass also die Wurzeln der Gleichung (1) die Abscissen der Durchschnittspunkte der Kurve (2) mit der x-Axe sind.

Nun ist aber die Kurve (2) nichts anderes als die parallel zu den Koordinatenaxen verschobene Parabel $y = x^2$; denn ergänzt man in Gleichung (2) die x enthaltenden Glieder zu einem vollständigen Quadrat, so geht (2) über in:

$$y - \left(c - \frac{b^2}{4}\right) = \left(x + \frac{b}{2}\right)^2,$$

so dass also $\left(-\frac{b}{2}; \frac{4c - b^2}{4}\right)$ der Scheitel der Parabel (2) ist. Damit ist die Lage der Parabel zum Koordinatensystem vollständig bestimmt. Mit $x = 0$ liefert (2) überdies noch $y = c$, so dass die Parabel durch den Punkt $(0; c)$ geht.

Zeichnet man nun die Parabel $y = x^2$ samt Axe und Scheiteltangente möglichst genau auf ein Blatt Pauspapier, ferner auf ein Blatt Millimeterpapier ein rechtwinkliges Axenkreuz und markirt auf dessen beiden Axen die Punkte . . . . . — 4, — 3, — 2. — 1, 0, 1, 2, 3, 4 . . . . ., so lässt sich mittelst dieses

Apparates jede numerische Gleichung II. Grades graphisch-mechanisch folgendermassen auflösen:

Man lege das Pauspapier auf das Millimeterpapier (Axe der Parabel in der Richtung der positiven Ordinatenaxe) und verschiebe das erstere so, dass die Axe der Parabel in die Gerade $x = -\frac{b}{2}$ des Millimeterpapiers zu liegen kommt, und die Peripherie der Parabel durch den Punkt $(0; c)$ des Millimeterpapiers geht; alsdann liest man bei den Schnittpunkten der Parabel mit der x-Axe unmittelbar die Wurzeln der quadratischen Gleichung ab.

Nimmt man als Einheit für die Parabel und für das Koordinatensystem auf dem Millimeterpapier den Doppelcentimeter, so lassen sich die Wurzeln annähernd auf drei Stellen ablesen.

Die eben gegebene Einstellungsregel für die Parabel ist die einfachste, da die Konstanten b und c direkt zur Verwendung kommen; zugleich springt deren geometrische Bedeutung in die Augen. Der Schnittpunkt $(0; c)$ der Parabel und der Ordinatenaxe wird aber oft übers Blatt fallen, auch kann die Einstellung in diesen Punkt unsicher werden; man berechne daher die Ordinate $\frac{4c - b^2}{4}$ oder $c - \left(\frac{b}{2}\right)^2$ des Scheitels der Parabel, dann hat man folgende Einstellungsregel:

Stelle den Scheitel der Parabel in den Punkt $\left(-\frac{b}{2}; \frac{4c - b^2}{4}\right)$ und ihre Axe in die Gerade $x = -\frac{b}{2}$ des Millimeterpapiers.

Markirt man auf der Axe der Pauspapier-Parabel von ihrem Scheitel ausgehend die Punkte 1, 2, 3, 4 . . . . . und teilt die Strecken zwischen diesen Punkten in 10 gleiche Teile, so lässt sich die Parabel auch leicht einstellen, wenn ihr Scheitel über das Millimeterpapier hinausfällt.

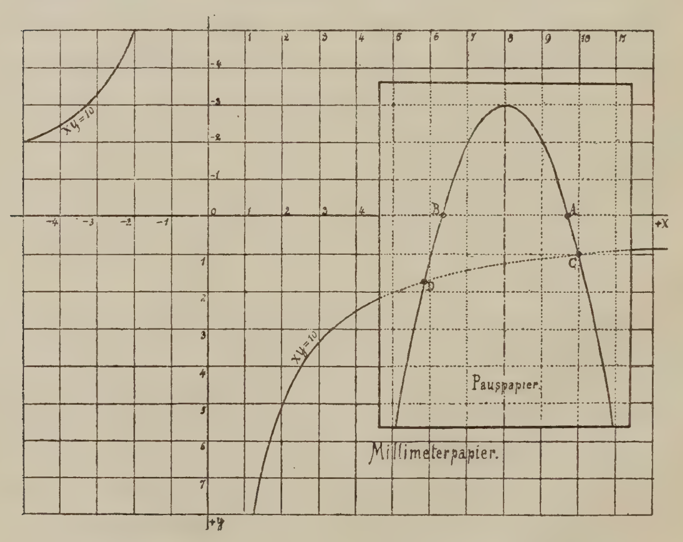
Weiter leuchtet geometrisch unmittelbar ein, je nachdem $4c - b^2 \lesseqgtr 0$, wird die x-Axe des Millimeterpapiers von der Parabel $\left\{\begin{array}{l}\text{geschnitten}\\ \text{berührt}\\ \text{nicht geschnitten}\end{array}\right\}$, d. h. sind die Wurzeln der quadratischen

Gleichung $\left\{\begin{array}{l}\text{reell und getrennt}\\ \text{reell und zusammenfallend}\\ \text{komplex konjugirt}\end{array}\right\}$. Die Scheitelordinate der Parabel ist also $^1/_4$ von der Diskriminante. Da die Abscisse der Parabel $y = x^2$ die Quadratwurzel aus der Ordinate ist, so werden bei dieser graphischen Methode die Wurzeln der quadratischen Gleichung (1) nach der Formel

$$x = -\frac{b}{2} \pm \sqrt{-\frac{4\,c - b^2}{4}}$$

berechnet; diese Formel lässt sich direkt aus der Figur ablesen. Die parallel verschobene Parabel besorgt also alle zur Auflösung einer quadratischen Gleichung nötigen Rechnungen, nämlich die Quadratwurzelausziehung samt der algebraischen Addition des rationalen und irrationalen Teils, von selbst. Ist die Einstellung der Parabel nach der ersten Regel möglich, so wird überdies auch noch der Radikand der Quadratwurzel ($= -\,^1/_4$ Diskriminante) durch die graphisch-mechanische Operation berechnet.

Beispiel: $x^2 - 16\,x + 61 = 0.$



Stellt man die Axe der Pauspapier-Parabel in die Gerade $x = \frac{16}{2} = 8$, ihren Scheitel in den Punkt $(8;\ 61 - 8^2 = -3)$

des Millimeterpapiers, so liest man bei den Schnittpunkten A und B der Parabel mit der x-Axe des Millimeterpapiers die Wurzeln 9,73 und 6,27 der quadratischen Gleichung ab.

Die in der Figur gezeichnete Hyperbel $xy = 10$ braucht man für das Beispiel bei den kubischen Gleichungen; die Figur dient zugleich zur Erläuterung einer dort vorkommenden Besonderheit, desshalb ist das Beispiel so gewählt, dass die erste Einstellungsregel nicht möglich ist, da der Punkt (0 ; 61) übers Blatt hinausfällt. Es sei dem Leser überlassen, sich solche Beispiele selbst zu berechnen, er hat hiezu nur der kleinen Mühe sich zu unterziehen, die Parabel $y = x^2$ auf Pauspapier zu zeichnen; wozu nur noch erwähnt werden mag, dass das Princip der Lösung (Einstellung der Parabel) für die höheren Gleichungen genau dasselbe ist, so dass diese Gleichungen bei einiger Gewandtheit im Einstellen der Parabel fast mit derselben Leichtigkeit graphisch aufzulösen sind, wie die quadratischen Gleichungen.

Aus demselben Grund folgen gleich hier einige Bemerkungen, die genau so für die höheren Gleichungen giltig sind, und eben vorzugsweise mit Rücksicht auf diese Gleichungen angeführt werden:

a) Ist die Gleichung von der Form:

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so dividire man dieselbe zuerst mit a durch; oder man setze

$$x = \frac{\xi}{a}$$

und löse die Gleichung:

$$\xi^2 + b\xi + ac = 0,$$

was in vielen Fällen bequemer sein wird (cf. auch unter f).

b) Die allgemeinere Substitution

$$x = \frac{\xi}{\alpha} \quad \text{oder} \quad x = \alpha\xi$$

wo α nach den Umständen zu wählen ist, ist auch in allen den Fällen zu verwenden, wo eine oder mehrere Wurzeln (Schnittpunkte) bei Anwendung der gegebenen Gleichung über das Blatt hinausfallen würden.

c) Zu diesem Zweck könnte man auch die vorgelegte Gleichung in eine andere verwandeln, deren Wurzeln alle um eine gewisse

Grösse k kleiner oder grösser sind als die Wurzeln der gegebenen Gleichung, d. h Wurzelverkleinerung um $+k$ oder $-k$ vornehmen, was nach bekanntem Schema eine sehr einfache und rasch auszuführende Rechnung erfordert. Wie gross etwa das k zu wählen ist, zeigt sich in jedem einzelnen Fall, sobald man den Versuch macht, die Parabel einzustellen.

d) In dem Fall, dass eine oder mehrere Wurzeln übers Blatt hinausfallen, kann man diese auch durch Auflösung der Reciprokalgleichung (cf. Anm. S. 4) bestimmen. Löst man sowohl die Originalgleichung als ihre Reciprokalgleichung, so wird man meist alle reellen Wurzeln, überdies häufig auch noch Proben erhalten.

e) Zur Einstellung der Parabel kann man auch noch einen oder mehrere Punkte derselben, deren x man willkürlich annimmt, nach bekanntem Divisions-Algorithmus sehr rasch und einfach berechnen. Für das obige Beispiel zeigt das Schema:

$$\begin{array}{r|ccc|} & x^2 & -16x & +61 \\ \hline 10 & 1 & -6 & \boxed{1} \end{array},$$

dass die Parabel durch den Punkt (10; 1) geht. Die Berechnung eines solchen Punkts erhöht die Sicherheit der Einstellung und dient zugleich zur Probe. Wenn man insbesondere für eine weiter hinausfallende Wurzel in der Gegend dieser Wurzel einen oder zwei Punkte der Parabel solcher Weise berechnet, so tragen diese zur sicheren Einstellung der Parabel in der Gegend der Wurzel und daher auch zur genaueren Bestimmung der Wurzel bei. Endlich ist noch zu erwähnen, dass ein so berechneter Punkt auch die Berechnung der Scheitelordinate ersetzen kann.

f) Würde man die Parabelschar $y = ax^2$, wo a willkürlicher Parameter ist, auf das Pauspapier zeichnen, so könnte man damit direkt die allgemeinste quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx + c = 0$$

auflösen. Die Funktionskurve:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$\text{oder} \quad y - \frac{4ac - b^2}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$$

ist die parallel verschobene Parabel $y = ax^2$ mit Scheitel $\left(-\frac{b}{2a}; \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$. Die Parabel geht ebenfalls durch den Punkt

(0; c); auch lassen sich für dieselbe, nach Bemerkung e), eben so rasch weitere Punkte berechnen. Die Einstellung geschieht also ganz analog wie oben; man hat nur die a-Parabel*) mit dem Auge festzuhalten.

Dieser Fall wird praktisch bei den Gleichungen IV. und höheren Grades (s. unten); hiebei kann a auch negativ sein, alsdann hat man die Axe der Parabelschar in der Richtung der negativen Ordinatenaxe zu legen.

2. Die kubische Gleichung.

Die allgemeine Gleichung III. Grades

$$(1) \qquad x^3 + bx^2 + cx = d$$

giebt, auf die Form gebracht:

$$(1') \qquad x(x^2 + bx + c) = d,$$

und ersetzt durch das simultane System

$$\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = x^2 + bx + c \\ xy = d \end{array} \right\},$$

zu erkennen, dass die Abscissen der Schnittpunkte der Parabel (2) und der Hyperbel (3) die Wurzel der Gleichung (1) sind. Diese beiden Kurven schneiden sich in 4 Punkten, wovon einer im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegt, die drei endlichen Schnittpunkte liefern die Wurzeln der Gleichung (1).

Zeichnet man daher die binomische Hyperbelschar II. Ordnung $xy = d$, indem man d als willkürlichen Parameter betrachtet, auf Millimeterpapier, so lässt sich mittelst dieser Hyperbeltafel und der Pauspapier-Parabel jede numerische Gleichung III. Grades graphisch-mechanisch auflösen nach der Regel:

Für die *allgemeine kubische Gleichung* stelle man die Pauspapier-Parabel genau so ein, wie bei den quadratischen Gleichungen, und lese in den Abscissen der Schnittpunkte derselben mit der d-Hyperbel die reellen Wurzeln der vorgelegten kubischen Gleichung ab.

Dass man gleich nach der Einstellung hier und in den folgen-

*) a-Parabel als Abkürzung für „die dem Wert a entsprechende Parabel der Schar“.

den Fällen sieht, wie viele Wurzeln reell und wie viele imaginär sind, leuchtet ein.

Zur Aufzeichnung der Hyperbelschar $xy = d$ gebe man dem d zunächst die Werte 1, 2, 3, 4......, indem man die Einheit gleich dem Doppelcentimeter nimmt, und zeichne die entsprechenden Hyperbeln auf, wobei man jede Kurve, deren d durch 5 teilbar ist, stärker zieht und zu jeder Hyperbel an mehreren Stellen den Wert ihres d beisetzt. Zwischen $xy = 0$ und $xy = 1$ schalte man die Hyperbeln ein, deren d gleich 0,1; 0,2; ......; 0,9 ist, und ziehe dieselben punktirt aus. Diese letzteren braucht man aber nur innerhalb derjenigen Grenzen zu zeichnen, innerhalb deren der Raum zwischen $xy = 0$ und $xy = 1$ nicht zu schmal ist. Zwischen je zwei aufeinanderfolgende ganzzahlige Hyperbeln schalte man so viele punktirte Zehntel-Hyperbeln — anfänglich mehr, später nur noch die $(d + 0{,}5)$-Hyperbel, noch später wird selbst diese überflüssig — ein, dass das Auge bequem graphisch interpoliren kann, wobei diese Zehntel-Hyperbeln ebenfalls nur in der Gegend ihrer Scheitel zu ziehen sind. Übrigens wird die Hyperbeltafel auch ohne diese letzteren Zehntel-Hyperbeln schon gute Dienste leisten.

Zu erwähnen ist noch, dass auf jeder zur x- resp. y-Axe parallelen Geraden die Differenz der Abscissen resp. Ordinaten je zweier aufeinanderfolgender ganzzahliger Hyperbeln konstant ist, was zur raschen und sicheren Aufzeichnung der Hyperbelschar beiträgt.

Ferner ist zu bemerken, dass man nur die Hyperbeln mit positiven d, welche im ersten und dritten Quadranten liegen, zu zeichnen braucht; ist d negativ, so drehe man das Millimeterpapier um 90^0, wodurch die Hyperbeln in den zweiten und vierten Quadranten kommen.

Hat die kubische Gleichung eine verhältnissmässig kleine und zwei grössere Wurzeln, was man nach der Einstellung sofort daran erkennt, dass ein Schnittpunkt der Parabel und der d-Hyperbel nahe an der y-Axe liegt, so verfahre man, wenn der letztere Punkt übers Blatt fällt, folgendermassen:

Gegeben:

$$x^3 - 16x^2 + 61x - 10 = 0 \quad \text{oder} \quad x(x^2 - 16x + 61) = 10.$$

(Fig. S. 12.) Man stelle die Pauspapier-Parabel über dem die Hyperbelschar $xy = d$ enthaltenden Millimeterpapier genau so ein, wie im Beispiel (S. 12) und lese bei den Schnittpunkten C und D der Parabel und der Hyperbel $xy = 10$ zunächst die Wurzeln $x_1 = 10$ und $x_2 = 5{,}83$ als Abscissen dieser Schnittpunkte ab; die dritte Wurzel wird, da die Parabel durch den Punkt $(0; 61)$ geht, übers Blatt fallen und ist, wie man sieht, ziemlich klein, so dass man dieselbe aus der gegebenen Gleichung mit Vernachlässigung der Glieder x^3 und $-16x^2$ erhält, d. h. aus:

$$61x - 10 = 0; \qquad x_3 = 0{,}16.$$

Probe: $x_1 + x_2 + x_3 = 10 + 5{,}83 + 0{,}16 = 15{,}99$ (statt 16).

Das Beispiel ist absichtlich mit einer ganzzahligen Wurzel gewählt, damit man rasch die folgende weitere Probe machen kann: die kubische Gleichung mit $(x - 10)$ dividirt nach dem bekannten Divisions-Algorithmus:

$$\begin{array}{r|rrrr} & 1 & -16 & 61 & -10 \\ \hline 10 & 1 & -6 & 1 & \boxed{0} \end{array}$$

giebt die quadratische Gleichung $x^2 - 6x + 1 = 0$, welche nach der Formel gelöst die Wurzeln liefert:

$$3 \pm \sqrt{8} = \begin{cases} 5{,}82_{843} \\ 0{,}17_{157}. \end{cases}$$

Der hier angewandte Satz lässt sich allgemein so aussprechen:

Eine Gleichung n^{ten} Grades, welche r, im Verhältniss zu den übrigen Wurzeln, sehr kleine Wurzeln hat, liefert die letzteren näherungsweise aus derjenigen Gleichung r^{ten} Grades, welche aus den $(r+1)$ niedersten Gliedern der gegebenen Gleichung gebildet ist.

Beweis: Die kubische Gleichung mit den Wurzeln $\alpha, \varepsilon, \varepsilon'$, wo ε und ε' sehr klein sein sollen im Verhältniss zu α, ist:

$$x^3 - (\alpha + \varepsilon + \varepsilon')x^2 + (\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon')x - \alpha\varepsilon\varepsilon' = 0.$$

Dividirt man nun die aus den drei niedersten Gliedern gebildete quadratische Gleichung mit $(x - \varepsilon)$, so erhält man nach dem eben angewandten Algorithmus:

$$\begin{array}{r|lll} & (\alpha + \varepsilon + \varepsilon')x^2 & -(\alpha\varepsilon + \alpha\varepsilon' + \varepsilon\varepsilon')x & + \alpha\varepsilon\varepsilon' = 0 \\ \hline \varepsilon & \alpha + \varepsilon + \varepsilon' & -\alpha\varepsilon' + \varepsilon^2 & \boxed{\varepsilon^3} \end{array};$$

der Rest der Division ist ε^3, also sehr klein, wenn ε ein kleiner

ächter Bruch ist; daher ist ε auch näherungsweise eine Wurzel der quadratischen Gleichung, ebenso ε', da die Gleichung symmetrisch in ε und ε' ist. Allgemeiner Beweis ganz analog.

Fallen sonst Wurzeln übers Blatt, so kann man eines der Hilfsmittel benützen, das in den Bemerkungen zu den quadratischen Gleichungen gegeben worden ist. Bequeme Dienste hiezu leisten auch zwei weitere Pauspapier-Parabeln, bei denen die Ordinaten in $1/_{10}$ resp. $1/_{100}$ des Massstabes der Abscissen aufgetragen werden; die zweite Parabel ist ziemlich flacher als die, bei welcher Abscissen und Ordinaten in gleichem Massstab genommen sind, die dritte ist noch flacher; dadurch reichen diese neuen Parabeln auch weiter hinaus und ermöglichen die direkte Ablesung grösserer Wurzeln. Die Axeneinstellung, die ja nur mit den Abscissen zusammenhängt, ändert sich dadurch nicht, dagegen ist für die Scheitelordinate der Parabel, für den Durchschnittspunkt der Parabel mit der Ordinatenaxe, sowie für die Ordinaten sonst berechneter Punkte je $1/_{10}$ resp. $1/_{100}$ ihrer Werte zu nehmen. Die Wurzeln der Gleichung sind sodann bei der $d/_{10}$- resp. $d/_{100}$-Hyperbel abzulesen. Das Verfahren kann in analoger Weise auch bei den höheren Gleichungen angewandt werden.

Hat man den Apparat, die Hyperbelschar und die Pauspapier-Parabel, nicht zur Hand, und möchte man geschwind eine kubische Gleichung näherungsweise lösen, so bringe man sie auf die Form $x(x^2 + bx + c) = d$, zeichne die Hyperbel $xy = d$ für den gegebenen Wert von d auf, wozu die Berechnung einiger weniger Punkte genügt, berechne den Scheitel $\left(-\frac{b}{2}; \frac{4c - b^2}{4}\right)$ der Parabel $y = x^2 + bx + c$ und zeichne die Parabel $y = x^2$ für diesen Scheitel als Ursprung, wozu ebenfalls wenige Punkte genügen, die Abscissen der Schnittpunkte beider Kurven liefern alsdann näherungsweise die Wurzeln der kubischen Gleichung; die Wahl des Massstabes wird sich nach den Werten der gegebenen Koefficienten richten. Dies geht bei einiger Übung so rasch, dass man in sehr kurzer Zeit auf diese Weise die rohe Lösung einer kubischen Gleichung bewerkstelligt; man wird dann nie mehr zur reinen Probirmethode sich zurücksehnen.

Ganz analog kann man auch bei den höheren Gleichungen

verfahren. Bei einiger Übung ist es nicht schwer, die ungefähren Grössen der Wurzeln einer kubischen und einer reducirten biquadratischen Gleichung sogar aus dem Kopfe zu schätzen, indem man sich die Hyperbel und die parallel verschobene Parabel in ihrer gegenseitigen Lage einfach vorstellt; oder man macht eine ganz rohe Skizze.

Besonders ist auch noch darauf hinzuweisen, dass bei diesem graphischen Verfahren die kubische Gleichung nicht erst reducirt d. h. auf die Form $x^3 + cx = d$ gebracht zu werden braucht, sondern dass direkt die Auflösung der allgemeinen Gleichung möglich ist. Liegt eine reducirte kubische Gleichung vor, so ist einfach $b = 0$, die Axe der Parabel liegt in der y-Axe. Dieses graphische Verfahren gewährt also zugleich einen deutlichen Einblick in das Wesen der allgemeinen und der einfach reducirten Gleichung, wie es überhaupt im Stande ist, über viele die Gleichungen betreffenden Fragen in anschaulicher Weise Antwort zu geben. Z. B. kann man sehr rasch sehen, von welchem Einfluss eine Änderung der Konstanten der Gleichung auf die Änderung der Wurzeln ist. Diese und die folgenden Bemerkungen gelten analog für alle andern Gleichungen.

Bleiben z. B. die Koefficienten b und c konstant, und ist das Absolutglied d variabel, so kann man mittelst einer einzigen Einstellung die Wurzeln sämtlicher kubischen Gleichungen mit veränderlichem Absolutglied ablesen, oder sehen, wie die Änderung des Absolutgliedes die Wurzeln beeinflusst; insbesondere ablesen, wie gross das Absolutglied d sein muss, damit die Gleichung eine Doppelwurzel habe, indem man diejenige Hyperbel aufsucht, welche von der Parabel berührt wird; man sieht sofort, dass es im Allgemeinen zwei reelle Hyperbeln giebt, welche die eingestellte Parabel berühren; in der That ist die Diskriminante

$$27a^2d^2 + 4ac^3 + 4db^3 - b^2c^2 - 18\,abcd$$

der allgemeinsten kubischen Gleichung

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$$

in d quadratisch. Dasselbe gilt gemäss der Reciprokalgleichung für a.

Ist aber b und d gegeben und der Wert von c gesucht, für welchen die kubische Gleichung (1) eine Doppelwurzel hat,

so schiebe man die Axe der Pauspapier-Parabel in der Geraden $x = -\frac{b}{2}$ bis sie die d-Hyperbel berührt und lese den Wert von c beim Durchschnitt der Parabel mit der y-Axe des Millimeterpapiers ab; man findet stets nur einen Wert von c, woraus folgt, dass die durch Nullsetzung der Diskriminante zu erhaltende kubische Gleichung für c stets im Falle des *Nicht-casus-irreducibilis* sich befindet; dasselbe gilt wegen der Reciprokalgleichung auch für b.

Wie es für das graphische Verfahren vollständig gleichgiltig ist, ob die kubische Gleichung allgemein oder reducirt ist, so macht dasselbe auch keinen Unterschied zwischen *Casus irreducibilis* und *Nicht-casus irreducibilis* der *Cardan*'schen Formel, indem es drei reelle Wurzeln oder eine liefert, wie die gegebene kubische Gleichung es verlangt. Im Falle die kubische Gleichung 3 reelle Wurzeln besitzt, führt die *Cardan*'sche Formel bekanntlich auf die Kubikwurzel aus einem komplexen Ausdruck, welche rein algebraisch zu berechnen nicht möglich ist, wesshalb die Algebraiker des XVI. Jahrhunderts eben den Namen *cas. irred.* für diesen Fall schufen. Erst die Einführung goniometrischer Funktionen, nämlich Einführung der kanonischen Form $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ für den Radikanden der Kubikwurzel — wesshalb wohl dieser Fall besser mit dem Namen *casus goniometricus*, der andere mit dem Namen *casus algebraicus* zu belegen wäre — ermöglicht es, „den Deckmantel des Imaginären“ (*Hankel*) abzustreifen und die drei Wurzeln in reelle Form zu kleiden. Damit ist bereits ein Wink für die funktionentheoretische Grundlage der graphisch-mechanischen Lösung der Gleichungen gegeben, worüber ich mich in einer späteren Abhandlung ergehen werde. Der Leser aber möge daraus ersehen, mit welch' feineren Hilfsmitteln — wenn ich mich so ausdrücken darf — die parallel verschobene Parabel und die Hyperbel der Schar rechnen, indem für sie keine verschiedene Behandlungsweise der beiden Fälle besteht.

3. Die biquadratische Gleichung.

Die allgemeine Gleichung IV. Grades lässt sich durch

einfache Reduktion ihrer Reciprokalgleichung (cf. Anm. S. 4) auf die Form bringen:

$$(1) \qquad x^4 + bx^3 + cx^2 = e$$

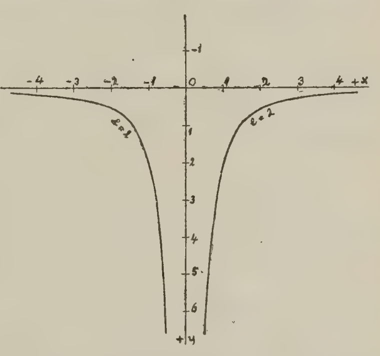
oder

$$(1') \qquad x^2(x^2 + bx + c) = e$$

und giebt ersetzt durch das simultane System:

$$\begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \qquad \left\{ \begin{matrix} y = x^2 + bx + c \\ x^2 y = e \end{matrix} \right\}$$

zu erkennen, dass ihre Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte der Parabel (2) mit der Hyperbel (3) sind. Eine solche Hyperbel hat die in nebenstehender Figur gezeichnete Gestalt. Die beiden Kurven (2) und (3) schneiden sich in 6 Punkten, wovon 2 im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, da die Hyperbel in diesem Punkt einen Rückkehrpunkt mit der Ordinatenaxe als Tangente (Asymptote) hat; die Abscissen der 4 endlichen Schnittpunkte sind die Wurzeln der Gleichung (1).



Für die *einfach reducirte* biquadratische Gleichung (mit verschwindendem x-Glied) hat man daher die *binomische* Hyperbelschar III. Ordnung $x^2y = e$ auf Millimeterpapier zu zeichnen; im Übrigen bleibt das Verfahren genau dasselbe wie bei den kubischen Gleichungen.

Diese neue Hyperbelschar wird in analoger Weise aufgezeichnet wie die für die kubischen Gleichungen dienende Schar; diesmal sind nur die Differenzen auf den Ordinaten konstant, welcher Umstand wieder zur raschen und sicheren Aufzeichnung verwertet werden kann. Da die Hyperbeln die x-Axe im Unendlichen dreipunktig berühren (∞ferner Wendepunkt mit Wende-Asymptote), so nähern sie sich dieser sehr rasch; man zeichne daher zuerst nur die Zehner-Hyperbeln für $e = 10, 20, 30 \ldots\ldots$, alsdann die Hyperbeln für $e = 1, 2, \ldots\ldots 9$ und ziehe letztere nur in der Gegend, wo der Raum zwischen $x^2y = 0$ und $x^2y = 10$ nicht zu schmal

wird. Zwischen die Zehner-Hyperbeln werden die übrigen ganzzahligen Hyperbeln nach Bedürfniss eingeschaltet. Zehntel-Hyperbeln werden nur noch notwendig zwischen $e = 0$ und $e = 1$; allenfalls noch teilweise die 1,5- und 2,5-Hyperbel.

Auch hier braucht man nur die Hyperbeln für positive Werte von e zu zeichnen, für welche dieselben im ersten und zweiten Quadranten liegen; ist e negativ, so drehe man das Millimeterpapier um 180°, wodurch die Hyperbeln in den dritten und vierten Quadranten zu liegen kommen.

Hat die Gleichung zwei verhältnissmässig kleine und zwei grössere Wurzeln, was man nach der Einstellung sofort wieder ersieht, so kann man, wenn erstere übers Blatt fallen, ganz analog verfahren, wie bei den kubischen Gleichungen. **Beispiel:**

$$x^4 - 16x^3 + 61x^2 - 2 = 0 \quad \text{oder} \quad x^2(x^2 - 16x + 61) = 2.$$

Stelle die Parabel genau wie in den Beispielen S. 12 und 17, und lese bei der Hyperbel $x^2y = 2$ zunächst die zwei Wurzeln $x_1 = 9{,}74$ und $x_2 = 6{,}25$ ab. Die zwei andern kleinen Wurzeln werden übers Blatt fallen, die eine ist positiv, die andere negativ, da die der y-Axe sich nähernden Zweige der Hyperbel zu beiden Seiten der y-Axe liegen; da ferner der im ersten Quadranten liegende Zweig der Hyperbel zuerst getroffen werden muss, so ist absolut genommen die positive Wurzel etwas grösser als die negative. Mit Vernachlässigung von x^4 und $-16x^3$ findet man dieselben aus der quadratischen Gleichung: $61x^2 - 2 = 0$, woraus $x = \pm 0{,}181$; also auf 2 Decimalen nahezu: $x_3 = +0{,}18$; $x_4 = -0{,}18$.

Aus diesem Beispiel kann man ersehen, wie die graphische Methode über die Wurzel-Verhältnisse einer numerischen Gleichung Aufschluss zu geben im Stande ist: da die Hyperbel $x^2y = 2$ in der Gegend der Wurzeln x_1 und x_2 sehr nahe an der x-Axe liegt, so sind diese Wurzeln nur wenig verschieden von den Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 - 16x + 61 = 0$, welche man aus den drei höchsten Gliedern der biquadratischen Gleichung erhält.

Läge also etwa das Beispiel:

$$x^4 + 30x^3 + 210x^2 - 3 = 0$$

vor und man versucht die Einstellung, so findet man, wenn die Hyperbeltafel nicht sehr ausgedehnt ist, dass alle Wurzeln übers Blatt fallen, zugleich sieht man aber auch, dass die Gleichung

zwei negative Wurzeln mit absolut grösserem Wert hat, welche nahezu die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + 30x + 210 = 0$ sind, und dass die zwei kleineren Wurzeln wieder nahezu aus $210x^2 - 3 = 0$ sich bestimmen lassen.

Weiteres über die biquadratischen Gleichungen siehe in der nächsten Nummer.

4. Die Gleichung V. Grades.

Die allgemeine Gleichung V. Grades lässt sich durch einfache Reduktion ihrer Reciprokalgleichung auf die Form

$$(1) \qquad ax^5 + bx^4 + cx^3 = dx^2 + 1$$

oder

$$(1') \qquad x^3(ax^2 + bx + c) = dx^2 + 1$$

bringen und giebt, ersetzt durch das simultane System

$$\begin{cases} (2) & y = ax^2 + bx + c \\ (3) & x^3 y = dx^2 + 1 \end{cases}$$

zu erkennen, dass ihre Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte der Parabel (2) mit der trinomischen Hyperbel IV. Ordnung (3) sind (cf. Fig. S. 24 und Figur rechts auf S. 26).

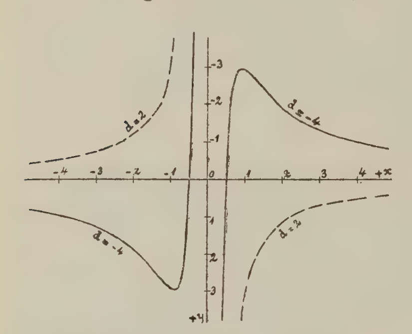
Diese beiden Kurven schneiden sich in 8 Punkten, von denen 3 im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, da dieser Punkt ein „Spitzpunkt“ *) d. h. ein dreifacher Punkt mit drei (mit der Ordinatenaxe) zusammenfallenden Tangenten (Asymptoten) ist; die 5 endlichen Schnittpunkte sind die Wurzeln der Gleichung (1).

Die allgemeine quadratische Gleichung enthält zwei willkürliche Konstanten, welche bei der graphischen Auflösung durch die Parallelverschiebungsgrössen der Parabel $y = x^2$ zum Ausdruck kommen; die allgemeine kubische und die einfach reducirte biquadratische Gleichung enthalten je drei Konstanten, daher ist zu ihrer Auflösung die Parallelverschiebung der Parabel über einer Kurvenschar, welche die dritte willkürliche Konstante involvirt, notwendig. Für die einfach reducirte Gleichung V. Grades, welche vier willkürliche Konstanten enthält, braucht man auf dem Pauspapier die Parabelschar $y = ax^2$, deren Parameter a die vierte willkürliche Konstante repräsentirt; also Regel:

---

*) Über den Begriff und Namen Spitzpunkt vgl. meine im Vorwort citirte und nächster Zeit erscheinende Schrift über „die Praxis der Kurvendiskussion“.

Um die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades (mit verschwindendem x-Glied) graphisch-mechanisch aufzulösen, stelle man die Pauspapier-Parabelschar $y = ax^2$ über der auf Millimeterpapier gezeichneten *trinomischen* Hyperbelschar IV. Ordnung $x^3y = dx^2 + 1$, wie in der Bemerkung f) bei den quadratischen Gleichungen angegeben, ein und lese bei den Schnittpunkten der a-Parabel mit der d-Hyperbel die Abscissen dieser Schnittpunkte als die reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung ab.



Für negative Werte von d hat die Hyperbel (3) die Gestalt der in nebenstehender Figur voll ausgezogenen Kurve; je grösser der absolute Wert von d, um so näher beim Ursprung liegen die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe und um so entfernter liegen die Kulminationspunkte der Kurve von der x-Axe (der Ort der Kulminationspunkte ist die binomische Hyperbel IV. Ordnung $x^3y + 2 = 0$). Es ist sofort klar, dass eine solche Hyperbel durch eine Parabel von der Form (2) in 5 Punkten geschnitten werden kann (cf. auch Fig. rechts auf S. 26). Für $d = 0$ und $d > 0$ hat die Hyperbel die Gestalt der gestrichelt ausgezogenen Kurve, woraus unmittelbar einleuchtet, dass eine Gleichung V. Grades von der Form (1) mit positivem d höchstens 3 reelle Wurzeln haben kann. Auch für negative ächt gebrochene Werte von d, wobei die Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe weiter aussen, die Kulminationspunkte nahe an der x-Axe liegen, hat die Gleichung im Allgemeinen höchstens 3 reelle Wurzeln, es sei denn, dass die Parabel $y = ax^2$ sehr flach d. h. a ein entsprechend kleiner ächter Bruch ist.

Wie mit Hilfe der Pauspapier-Parabelschar die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades gelöst wird, so lässt sich mit ihr auch die *allgemeine* biquadratische und die *allgemeinste* kubische Gleichung lösen.

Die *allgemeine* biquadratische Gleichung

$$\left.\begin{array}{ll} & ax^4 + bx^3 + cx^2 = dx + 1 \\ \text{oder} & x^2(ax^2 + bx + c) = dx + 1 \end{array}\right. \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ x^2y = dx + 1 \end{array}\right\}$$

erfordert zur Lösung mittelst der Pauspapier-Parabelschar die *trinomische* Hyperbelschar III. Ordnung $x^2y = dx + 1$ auf dem Millimeterpapier.

Eine solche Hyperbel (s. die mittlere Fig. S. 26) unterscheidet sich von der Hyperbel $x^2y = e$ (s. Fig. S. 21), welche zur Auflösung der reducirten biquadratischen Gleichung dient, dadurch dass von ersterer die x-Axe im Unendlichen nur 2punktig berührt und daher im Endlichen, nämlich im Punkt $\left(-\frac{1}{d}; 0\right)$, geschnitten wird, während die Hyperbel $x^2y = e$ die x-Axe im Unendlichen 3punktig schneidet, also auf ihr einen ∞fernen Wendepunkt hat; die neue Hyperbel hat ihren Wendepunkt im Endlichen und zugleich einen endlichen Kulminationspunkt in Beziehung auf die x-Axe. Der Ort der Kulminationspunkte der neuen Hyperbelschar ist $x^2y + 1 = 0$.

Zieht man es vor, den Koefficienten von x auf die Einheit zu bringen, so wird die Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 = x + e$$

mit Hilfe der trinomischen Hyperbelschar

$$x^2y = x + e$$

in Verbindung mit der Pauspapier-Parabelschar gelöst.

Die *allgemeinste* kubische Gleichung

$$\left.\begin{array}{ll} & ax^3 + bx^2 + cx = d \\ \text{oder} & x(ax^2 + bx + c) = d \end{array}\right. \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ xy = d \end{array}\right\}$$

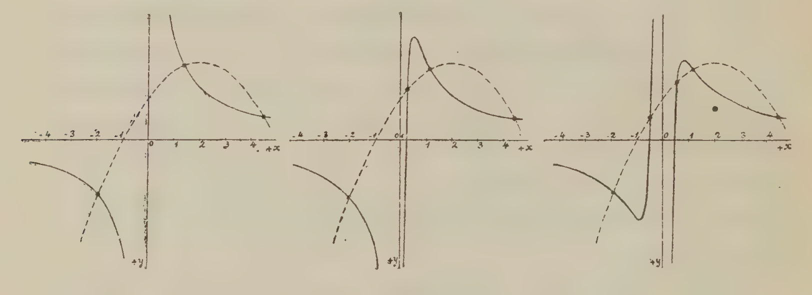
erfordert zur *Parabelschar*-Lösung dieselbe Millimeterpapier-Hyperbelschar, welche zur Lösung der *allgemeinen* kubischen Gleichung mittelst *einfacher* Parabel nötig ist.

Hat man also zur Lösung der Gleichungen V. Grades die Parabelschar angefertigt, so wird man diese häufig auch mit Vorteil zur Lösung der kubischen Gleichungen benützen können, da eine kubische Gleichung in der allgemeinsten Form geschrieben in vielen Fällen bequemere Koefficienten haben wird als die allgemeine Form. Ist z. B. der Koefficient a ein ächter Bruch, so ist die a-Parabel flach, reicht also weiter hinaus und ermöglicht die direkte Ablesung grösserer Wurzeln, analog wie es oben für die

Parabeln gezeigt wurde, deren Ordinaten in kleinerem Massstab aufgetragen sind.

Die Einheitlichkeit des Verfahrens, sowie dessen successive Komplikation von Grad zu Grad springt deutlich in die Augen, wenn man die folgenden Gleichungen und Figuren betrachtet:

allgemeinste Gl. III.	*allgemeine* Gl. IV.	*einfach reducirte* Gl. V. Grads
$x(ax^2+bx+c)=d$	$x^2(ax^2+bx+c)=dx+1$	$x^3(ax^2+bx+c)=dx^2+1$
$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ xy=d \end{cases}$	$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x^2y=dx+1 \end{cases}$	$\begin{cases} y=ax^2+bx+c \\ x^3y=dx^2+1 \end{cases}$



Die drei Hyperbeln

II.	III.	IV. Ordnung

haben im ∞fernen Punkt der Abscissenaxe gewöhnliche Kurvenpunkte, welche in 2punktiger Berührung mit ihrer Asymptote stehen; im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe haben sie bezw. einen

1fachen	2fachen	3fachen Punkt mit
1	2 zus.gefallenen	3 zus.gef. Tang. (Asympt.) d. h. einen
gewöhnlichen P.	Rückkehrpunkt	Spitzpunkt; ferner haben sie
0	1	2 reelle Schnittpunkte auf $y=0$,
0	1	2 reelle Wendepunkte,
0	1	2 endl. Kulminationspunkte in Beziehung auf die x-Axe.

Mit der Parabel $y=ax^2+bx+c$ haben sie im Ganzen

$2.2=4$	$2.3=6$	$2.4=8$ Schnittp. gemein, wovon
1	2	3

im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, somit:

3	4	5 endliche Schnittpunkte,

deren Abscissen Wurzeln der betreffenden Gleichungen sind.

Die Vergleichung der drei Figuren zeigt folgendes: die erste Hyperbel, deren Zweige kongruent sind, kann von der parallel verschobenen Parabel höchstens in 3 endlichen Punkten geschnitten werden; dadurch, dass die zweite Hyperbel (deren Zweig im zweiten Quadranten im Wesentlichen dieselbe Gestalt hat, wie der entsprechende Zweig der ersten Hyperbel) im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe zurückkehrt und damit einen Kulminationspunkt und einen Wendepunkt erhält, um in derselben Weise zum ∞fernen Punkt der Abscissenaxe zu verlaufen wie die erste, ist die Möglichkeit eines weiteren reellen Schnittpunkts gegeben; für die dritte, ebenfalls aus 2 kongruenten Zweigen bestehende, Hyperbel endlich, welche vom ∞fernen Punkt der Abscissenaxe von der negativen Seite her wie die beiden ersten hereinkommt, alsdann, ehe sie in den ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe kommt, einen Wendepunkt und einen Kulminationspunkt erhält, während ihr zweiter Zweig im Wesentlichen dieselbe Gestalt hat wie der zweite der mittleren Hyperbel, ist die Möglichkeit von 5 reellen Schnittpunkten gegeben.

In Betreff dieser allgemeinen graphisch-mechanischen Lösung der einfach reducirten Gleichung V. Grades (eine graphische Lösung der allgemeinsten Gleichung V. Grades s. in Abschnitt IV) darf wohl auch noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass bis jetzt eine allgemeine theoretische Lösung der Gleichungen V. Grades nur für die zweifach reducirte Gleichung (s. u. A. die Abhandlungen von *Klein* und *Gordan* in Band XII u. XIII der Math. Annalen) geleistet ist. Abgesehen davon, dass man zur Lösung einer allgemeinen Gleichung diese erst zweifach reduciren muss, was für die praktische Ausführung umständliche Rechnungen bedingt, kann man gegen die mathematische Vollkommenheit einer solchen Lösung auch in theoretischer Beziehung Einwände machen, wie aus den folgenden Betrachtungen hervorgeht.

Die graphisch-mechanische Lösung der *zweifach reducirten* Gleichung V. Grades

$$x^5 + bx^4 + cx^3 = f \text{ oder } x^3(x^2 + bx + c) = f \text{ oder } \begin{Bmatrix} y = x^2 + bx + c \\ x^3 y = f \end{Bmatrix}$$

würde auf dem Millimeterpapier die *binomische* Hyperbelschar IV. Ordnung $x^3 y = f$ erfordern.

Letztere hat, abgesehen davon, dass sie im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe eine höhere Singularität und im ∞fernen Punkt der Abscissenaxe einen Flachpunkt hat, sich also letzterer sehr rasch nähert, im Wesentlichen dieselbe Gestalt wie die zur Lösung der allgemeinen kubischen Gleichung dienende Hyperbel $xy = d$, und wird daher von der parallel verschobenen Parabel höchstens in 3, mindestens in einem reellen Punkt geschnitten, woraus graphisch folgt, dass die zweifach reducirte Gleichung V. Grades höchstens 3 reelle Wurzeln haben kann (dass nicht alle Wurzeln derselben reell sein können, ergibt sich auch daraus, dass ausser $\Sigma \frac{1}{x} = 0$ auch $\Sigma \frac{1}{x^2} = 0$ ist). Hat nun eine vorgelegte allgemeine Gleichung V. Grades eine reelle und vier imaginäre Wurzeln, und wird deren Lösung abhängig gemacht von der Lösung einer zweifach reducirten Gleichung V. Grades, so wird die eine reelle Wurzel, welche letztere jedenfalls besitzt, bei der Rückwärtssubstitution auch die eine reelle Wurzel der allgemeinen Gleichung liefern. Hat aber die vorgelegte allgemeine Gleichung V. Grades fünf reelle Wurzeln, so müssen bei der Rückwärtssubstitution notwendig alle 5 Wurzeln in imaginärem Gewand auftreten, da die Analysis keine derselben bevorzugen kann, und müssen daher erst noch durch Abstreifung des imaginären Deckmantels in reelle Formen übergeführt werden. Es sind das dieselben Verhältnisse wie beim *casus goniometricus* (*irreducibilis*) der kubischen Gleichung, cf. S. 20. Hieraus nun und aus dem Umstand, dass das graphisch-mechanische Verfahren direkt die einfach reducirte Gleichung V. Grades allgemein in sehr einfacher Weise zu lösen im Stande ist, wird wohl der Schluss zu ziehen sein, dass es ein Umweg ist, die Lösung einer allgemeinen Gleichung V. Grades von der Lösung einer zweifach reducirten Gleichung desselben Grades abhängig zu machen, und dass eine vollständig befriedigende theoretische Lösung erst geleistet ist, wenn die einfach reducirte und die allgemeine Gleichung V. Grades bezwungen sind. Dass dies aber jedenfalls seine grossen Schwierigkeiten hat, beweist ein Blick in die schönen Arbeiten von *Hermite*, *Brioschi*, *Kronecker*, *Klein*, *Gordan* u. A. auf dem Gebiet der Gleichungen V. Grades.

Aus der Einfachheit des graphischen Verfahrens aber glaube ich weiter schliessen zu dürfen, dass die heutigen Hilfsmittel der Analysis noch unzulänglich sind, dass die Analysis, um zu einer entsprechend einfachen, rein theoretischen Lösung der Gleichungen V. Grades zu gelangen, erst noch neue Hilfsmittel gewinnen muss, welche selbstverständlich auch die Lösungen der Gleichungen III. und IV. Grades zu vereinfachen und die Lösungen der Gleichungen höheren Grades zu geben im Stande sein müssten.

Was die soeben angeführte Lösung der zweifach reducirten Gleichung V. Grades anbelangt, so beachte man noch, dass analog der oben (S. 26) gegebenen Zusammenstellung die

allgemeine Gl. III.	*einfach reduc.* Gl. IV.	*zweifach reduc.* Gl. V. Grades
$x(x^2+bx+c)=d$	$x^2(x^2+bx+c)=e$	$x^3(x^2+bx+c)=f$

graphisch-mechanisch gelöst werden mittelst der *binomischen* Hyperbeln

$xy=d$	$x^2y=e$	$x^3y=f$

in Verbindung mit der Pauspapier-Parabel, während die *allgemeinen* Gleichungen

III.	IV.	V. Grades
$x(ax^2+bx+c)=1$	$x^2(ax^2+bx+c)=dx+1$	$x^3(ax^2+bx+c)=dx^2+ex+1$

zur Lösung mittelst der Pauspapier-Parabelschar auf dem Millimeterpapier erfordern würden:

die *einf. binom.* Hyperbel II. Ord.	die ∞^1 *Schar trinom.* Hyperbeln III. Ordn.	die ∞^2 *Schar quatrinomischer* Hyperbeln IV. Ordnung
$xy=1$	$x^2y=dx+1$	$x^3y=dx^2+ex+1$.

Hieraus ist ersichtlich, dass die Lösung der allgemeinen Gleichung V. Grades graphisch-mechanisch mittelst der Pauspapier-Parabelschar allgemein nicht mehr möglich ist, denn die hiezu nötige Hyperbelschar enthält zwei willkürliche Parameter, stellt also eine ∞^2Schar von Kurven dar, eine solche kann aber nicht gezeichnet werden. Vergl. auch die nächste Nummer.

Nimmt man aber die 3 Gleichungen III. bis V. Grades in der allgemeinsten Form:

$x(ax^2+bx+c)=d$	$x^2(ax^2+bx+c)=dx+e$	$x^3(ax^2+bx+c)=dx^2+ex+f$

so wäre zu ihren Lösungen mittelst der Pauspapier-Parabelschar auf dem Millimeterpapier notwendig:

die ∞^1 *Schar bin.* Hyperbeln II. Ord.	die ∞^2 *Schar trinom.* Hyperbeln III. Ordn.	die ∞^3 *Schar quatrinomischer* Hyperbeln IV. Ordnung
$xy = d$	$x^2y = dx + e$	$x^3y = dx^2 + ex + f$,

wobei die Möglichkeit einer allgemeinen graphischen Lösung schon mit dem III. Grad aufhört. Eine Lösung der Gleichungen IV. und V. Grades in diesen Formen ist aber, wenn auch praktisch umständlicher, so doch theoretisch möglich, wenn man die Gleichungen ersetzt durch die simultanen Systeme:

$$\left|\left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ z = dx + e \\ x^2y = z \end{array}\right.\right| \quad \left|\left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ z = dx^2 + ex + f \\ x^3y = z. \end{array}\right.\right|.$$

Hierüber Näheres in Abschnitt IV und V.

5. Die Gleichung VI. Grades.

Die allgemeine Gleichung VI. Grades durch einfache Reduktion ihrer Reciprokalgleichung auf die Form gebracht

$$(1) \qquad ax^6 + bx^5 + cx^4 = dx^3 + ex^2 + 1$$

oder

$$(1') \quad x^4(ax^2 + bx + c) = dx^3 + ex^2 + 1,$$

würde auf dem Millimeterpapier die ∞^2Schar quatrinomischer Hyperbeln V. Ordnung

$$(2) \qquad x^4y = dx^3 + ex^2 + 1$$

erfordern; also:

Die allgemeine graphische Auflösung der *einfach reducirten* Gleichungen VI. und höheren Grades mittelst der parallel zu verschiebenden *Pauspapier-Parabelschar* ist nicht möglich.

Eine graphische Lösung von Fall zu Fall liefert die Hyperbel (2), wenn man dieselbe für die jeweilig gegebenen Werte von d und e besonders aufzeichnet. In dieser Weise könnte man aber auch die allgemeine Gleichung behandeln. Man bringt dieselbe auf die Form:

$$(3) \quad x^4(x^2 + bx + c) = dx^3 + ex^2 + fx + g,$$

zeichnet die Hyperbel

$$(4) \qquad x^4y = dx^3 + ex^2 + fx + g$$

für die gegebenen Werte von d, e, f und g auf Millimeterpapier und stellt auf ihm die Parabel $y = x^2$ in der bisherigen Weise

ein. Man hätte damit „ein graphisches Verfahren von Fall zu Fall" (auch für höhere Gleichungen anwendbar), welches jedenfalls einfacher wäre, als wenn man die parabolische Funktionskurve der allgemeinen Gleichung VI. Grades

$$(5) \quad y = x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 + ex^2 + fx + g$$

aufzeichnen wollte, um ihre Wurzeln als Schnittpunkte dieser Kurve mit der x-Axe zu erhalten.

Bringt man den Koefficient von x^6 nicht auf die Einheit, so hat man die Pauspapier-Parabelschar anzuwenden.

Dagegen führt ein anderes Hilfsmittel zur allgemeinen graphischen Auflösung der Gleichung (1). Setzt man in ihr $x = \alpha\xi$, so geht sie über in:

$$(6) \quad a\alpha^6\xi^6 + b\alpha^5\xi^5 + c\alpha^4\xi^4 = d\alpha^3\xi^3 + e\alpha^2\xi^2 + 1\,;$$

trifft man über α die Bestimmung:

$$(7) \qquad d\alpha^3 = 1, \text{ also } \alpha = \sqrt[3]{\frac{1}{d}},$$

so kommt die Gleichung, wenn man an Stelle von $a\alpha^6$, $b\alpha^5 \ldots$ wieder kurz $a, b \ldots$ und x anstatt ξ schreibt auf die Form:

$$(8) \qquad ax^6 + bx^5 + cx^4 = x^3 + ex^2 + 1.$$

Eine solche Gleichung heisse *eine einfach reducirte Gleichung mit zwei Einheitskoefficienten.* Die Gleichung VI. Grades dieser Art enthält nun nur noch 4 willkürliche Parameter, und kann daher graphisch-mechanisch allgemein aufgelöst werden.

Die Gleichung (8) erfordert auf dem Millimeterpapier die Hyperbelschar:

$$(9) \qquad x^4 y = x^3 + ex^2 + 1.$$

Neben den obigen Satz stellt sich also der folgende:

Die *einfach reducirte* Gleichung VI. Grades *mit zwei Einheitskoefficienten* wird allgemein graphisch-mechanisch gelöst durch Parallel-Verschiebung der Pauspapier-Parabelschar $y = ax^2$ über der auf Millimeterpapier gezeichneten *quatrinomischen* Hyperbelschar V. Ordnung $x^4 y = x^3 + ex^2 + 1$.

Da die Kurve (9) im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe einen vierfachen Punkt mit 4 mit dieser Axe zusammenfallenden Tangenten hat, so hat sie mit der Parabel $y = ax^2 + bx + c$ in diesem Punkt 4 ∞ferne Punkte gemein, so dass die Anzahl der

endlichen Schnittpunkte, Wurzeln der Gleichung (8), in der That 6 ist.

Die Gestalt der Hyperbel (9) hängt wesentlich von der kubischen Gleichung

$$(10) \quad x^3 + ex^2 + 1 = 0 \quad \text{oder} \quad x(x^2 + ex + 0) = -1,$$

ab, welche die Abscissen der endlichen Durchschnittspunkte der Hyperbel (9) mit der x-Axe liefert. Diese Gleichung soll als Anwendung der kubischen Gleichungen graphisch behandelt werden. Stellt man die Pauspapier-Parabel $y = x^2$ auf der Millimeterpapier-Hyperbelschar $xy = Const.$ so ein, dass sie durch den Ursprung geht und die (-1)-Hyperbel berührt, so fällt ihre Axe in die Gerade $x = 0,94$, also ist das einer Doppelwurzel entsprechende $e = -2.0,94 = -1,88$. (Die Diskriminante der Gleichung (10) liefert $27 + 4e^3 = 0$, woraus $e = -\frac{3}{2}\sqrt[3]{2} = -1,8898$). Für diesen Wert von e liest man für die Gleichung (10) die Doppelwurzel $x_1 = x_2 = 1,26$ und die einfache Wurzel $x_3 = -0,63$ ab; für alle Werte von $e \lessgtr -1,89$ liest man $\left\{\begin{array}{l}\text{2 positive und eine negative}\\ \text{nur eine negative reelle}\end{array}\right\}$ Wurzel ab.

Die Kurve (9) verhält sich im ∞fernen Punkt der x-Axe wie die Hyperbel $xy = 1$, im ∞fernen Punkt der y-Axe analog der mittlern Hyperbel auf S. 26; während aber dieser Punkt auf letzterer Hyperbel ein gewöhnlicher Rückkehrpunkt ist, ist er auf der Kurve (9) ein „Rückkehrspitzpunkt“ d. h. ein 4facher Punkt mit 4 mit der y-Axe zusammenfallenden Tangenten.

Für den Fall, dass die kubische Gleichung (10) drei reelle Wurzeln hat, kommt also die Hyperbel (9) von $x = -\infty$ im dritten Quadranten herein, erhält in diesem einen reellen Wendepunkt, einen Kulminationspunkt und durchschneidet die x-Axe in dem der negativen Wurzel der Gleichung (10) entsprechenden Punkt $(-x_3; 0)$, um von hier asymptotisch der y-Axe im zweiten Quadranten sich zu nähern, kehrt im ersten Quadranten zurück und durchschneidet die x-Axe in dem der kleineren positiven Wurzel der Gleichung (10) entsprechenden Punkt $(x_1; 0)$, erhält im vierten Quadranten einen Kulminationspunkt, dann einen Wendepunkt, tritt im Punkt $(x_2; 0)$ wieder in den ersten Quadranten

(x_2 grössere positive Wurzel der kubischen Gleichung), erhält ihren dritten Kulminations- und Wendepunkt und nähert sich asymptotisch der x-Axe. Diese Kurve schliesst sich also den 3 Hyperbeln auf S. 26 an, sie hat einen Kulminationspunkt, einen Wendepunkt und einen Schnittpunkt mit der x-Axe mehr als die dritte dieser Hyperbeln, wodurch man die Möglichkeit von 6 reellen Schnittpunkten derselben mit einer Parabel $y = ax^2 + bx + c$ erkennt.

Hat aber die Gleichung (10) nur eine negative reelle Wurzel, so fällt der vorhin im ersten und vierten Quadranten liegende Zweig ganz in den ersten Quadranten und hat die Gestalt der Hälfte einer gewöhnlichen Hyperbel; die Gleichung (8) kann dann höchstens 4 reelle Wurzeln haben.

Vom theoretischen Standpunkt aus lässt sich gegen diese Lösung nichts einwenden; dagegen können sich bei der praktischen Ausführung Schwierigkeiten ergeben. Die Gleichung (8) hat gemäss (6) und (7) ganz bestimmte Koefficienten und kann, falls Wurzeln übers Blatt fallen, nicht mehr so transformirt werden, dass alle Wurzeln ins Blatt zu liegen kommen, da ja die hiezu nötige Substitution bereits verwendet ist, um den Koefficienten von x^3 auf die Einheit zu bringen. Ist nun z. B. d ein kleiner ächter Bruch, so können gemäss (7) die Koefficienten $a\alpha^6$, $b\alpha^5$, $c\alpha^4$, je nach den gegebenen Werten von a, b und c solche Werte annehmen, dass mehrere oder alle reellen Wurzeln übers Blatt zu liegen kommen. Immerhin wird man aber durch Einstellung der Parabel Aufschlüsse über die Beschaffenheit und Verteilung der Wurzeln erhalten; einzelne Wurzeln können doch noch bestimmbar sein u. s. w. Ist dagegen d eine grössere Zahl, so wird α klein und alsdann werden für gewöhnlich die Werte von $a\alpha^6$, $b\alpha^5$, $c\alpha^4$ derart, dass wenigstens mehrere Wurzeln ins Blatt zu liegen kommen. In den meisten Fällen wird durch den Anblick der Figur, wenn man sich die Kurven übers Blatt hinaus fortgesetzt denkt, bestimmbar sein, wie viele Wurzeln reell, wie viele imaginär sind. Um mich über den praktischen Wert bestimmt aussprechen zu können, muss ich selbst noch weitere Versuche anstellen, worüber ich dann später berichten werde.

Ferner erhält man den Satz:

Die *zweifach reducirte* Gleichung VI. Grades

(11) $ax^6 + bx^5 + cx^4 = dx^3 + 1$ oder $\left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ x^4y = dx^3 + 1 \end{array}\right\}$ $\begin{array}{c}(12)\\(13)\end{array}$

wird graphisch-mechanisch gelöst durch Parallel-Verschiebung der Pauspapier-Parabelschar $y = ax^2$ über der auf Millimeterpapier gezeichneten *trinomischen* Hyperbelschar V. Ordnung $x^4y = dx^3 + 1$.

Bringt man hier überdies noch den Koefficienten d oder a mit der Substitution $x = \alpha\xi$ wie oben auf die Einheit, so würde die eine oder die andere der Kurvenscharen durch eine einfache Kurve ersetzt werden können.

Diese Lösung der zweifach reducirten Gleichung VI. Grades würde an die (S. 26) gegebene Zusammenstellung der Lösungen der allgemeinsten kubischen, der allgemeinen biquadratischen und der einfach reducirten Gleichung V. Grades naturgemäss sich anschliessen, wie ein Vergleich der Hyperbel (13) mit den dort angewandten Hyperbeln zeigt. Die Hyperbel (13) hat, abgesehen von ihrer höheren Singularität im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe im Wesentlichen dieselbe Gestalt wie die für die allgemeine biquadratische Gleichung verwendete Hyperbel $x^2y = dx + 1$; sie liefert daher, durch die parallel verschobene Parabel geschnitten, höchstens 4 reelle Schnittpunkte, woraus sich ergibt, dass die zweifach reducirte Gleichung VI. Grades höchstens 4 reelle Wurzeln haben kann. Es zeigen sich also, wie zu erwarten, ganz analoge Verhältnisse wie bei der zweifach reducirten Gleichung V. Grades. Endlich:

Die *dreifach reducirte* Gleichung VI. Grades

$$x^4(x^2 + bx + c) = g$$

erfordert zur Lösung mittelst der einfachen Pauspapier-Parabel $y = x^2$ die *binomische* Hyperbelschar V. Ordnung $x^4y = g$ auf dem Millimeterpapier.

Dieser Satz schliesst sich an die S. 29 gegebene Zusammenstellung der Lösungen der allgemeinen kubischen, der einfach reducirten biquadratischen und der zweifach reducirten Gleichung V. Grades an. Da die Hyperbel $x^4y = g$, abgesehen davon, dass sie eine höhere Singularität im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe und im ∞fernen Punkt der Abscissenaxe einen „Wendeflachpunkt" hat, im Wesentlichen von derselben Gestalt ist wie die zur einfach reducirten biquadratischen Gleichung

verwendete Hyperbel $x^2y = e$ (s. Fig. S. 21) — erstere nähert sich der y-Axe langsamer, der x-Axe rascher an als letztere —, so folgt, dass auch die dreifach reducirte Gleichung VI. Grades höchstens 4 reelle Wurzeln haben kann. Vergleicht man damit den Umstand, dass eine allgemeine (nullfach reducirte) und eine einfach reducirte Gleichung nicht notwendig imaginäre Wurzeln haben müssen, so ist mit Verallgemeinerung graphisch der Satz gefunden (vergl. auch die folgende Nummer):

Eine *zweifach*, ebenso eine *dreifach reducirte* Gleichung beliebigen Grades hat mindestens *zwei*, eine *vierfach*, ebenso eine *fünffach reducirte* Gleichung mindestens *vier* imaginäre Wurzeln u. s. f.

6. Die Gleichung VII. Grades.

Von hier an ist bei einfacher Reduktion und Transformation auf die Form mit 2 Einheitskoefficienten eine allgemeine graphische Lösung mittelst der einfachen Pauspapier-Parabelschar (Lösung mittelst zweier solcher Scharen s. in Abschnitt IV.) und einer Millimeterpapier-Hyperbelschar nicht mehr möglich. Die Sätze für die mehrfach reducirten Gleichungen sollen noch in Kürze zusammengestellt werden.

Die *zweifach reducirte* Gleichung VII. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten*

$$(1) \qquad x^5(ax^2 + bx + c) = dx^4 + x^3 + 1$$

erfordert auf dem Millimeterpapier die *quatrinomische* Hyperbelschar VI. Ordnung

$$(2) \qquad x^5y = dx^4 + x^3 + 1$$

in Verbindung mit der Pauspapier-Parabelschar $y = ax^2$.

Die *dreifach reducirte* Gleichung VII. Grades

$$(3) \qquad x^5(ax^2 + bx + c) = dx^4 + 1$$

erfordert die *trinomische* Hyperbelschar VI. Ordnung

$$(4) \qquad x^5y = dx^4 + 1$$

in Verbindung mit der Pauspapier-Parabelschar.

Die *vierfach reducirte* Gleichung VII. Grades

$$(5) \qquad x^5(x^2 + bx + c) = h$$

würde die *binomische* Hyperbelschar VI. Ordnung

$$(6) \qquad x^5y = h$$

in Verbindung mit der einfachen Pauspapier-Parabel $y = x^2$ erfordern.

Die Hyperbeln (2), (4) und (6) zeigen in Übereinstimmung mit dem Satz am Ende der letzten Nummer, dass Gleichung (1) und Gleichung (3) höchstens fünf, Gleichung (5) höchstens drei reelle Wurzeln haben kann.

Wie sich diese Lösungen den oben für die Gleichungen niedrigeren Grades gegebenen anschliessen, und wie das Verfahren auf die mehrfach reducirten Gleichungen höheren Grades sich ausdehnt, ist leicht zu erkennen.

In Betreff dieser höheren Gleichungen wäre noch folgendes zu bemerken: Kommt man bei einem mathematischen Problem auf eine bereits mehrfach reducirte Gleichung höheren Grades z. B. auf eine Gleichung von der Form (3), und hat man dieselbe numerisch aufzulösen, so zeichne man sich für den jeweiligen Wert von d die Hyperbel (4) auf Millimeterpapier und behandle sie mit der Pauspapier-Parabelschar. Hätte Jemand häufig eine Gleichung etwa von der Form (5) numerisch aufzulösen, so wäre für ihn die einmalige Anfertigung der Hyperbelschar $x^5 y = h$ von nicht geringem Vorteil. In analoger Weise liessen sich auch andere defekte Gleichungen höheren Grades graphisch lösen, indem man sie durch ein geeignetes System zweier simultanen Gleichungen ersetzt (vergl. auch den Anhang dieser Schrift).

B. Absonderung eines quadratischen Faktors aus den drei niedersten Gliedern.

1. Die quadratische Gleichung.

Für die quadratischen Gleichungen bleibt das Verfahren dasselbe wie oben, da die drei niedersten Glieder zugleich die drei höchsten sind.

2. Die kubische Gleichung.

Die *allgemeinste* kubische Gleichung in der Form:

$$(1) \quad ax^3 = bx^2 + cx + d \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= bx^2 + cx + d \quad (2) \\ y &= ax^3 \quad (3) \end{aligned} \right.$$

wird graphisch gelöst durch Parallelverschiebung der Pauspapier-Parabelschar $y = bx^2$ über der auf Millimeterpapier gezeichneten *binomischen* Parabelschar III. Ordnung $y = ax^3$.

Die Parabel (3), deren Bild für $a = 1$ auf S. 45 durch die gestrichelt gezogene Kurve dargestellt ist, verläuft für positive a im ersten und dritten Quadranten, hat im Nullpunkt einen Wendepunkt mit $y = 0$ als Tangente und möge daher *Wendeparabel* heissen; im Unendlichen hat sie, wie aus der homogenen Schreibweise $y\omega^2 = x^3$ sich ergiebt, einen in der Richtung $x = 0$ liegenden Rückkehrpunkt mit der ∞fernen Geraden $\omega = 0$ als Tangente. Die Kurven (2) und (3) haben daher im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe 3 Punkte gemein, sie schneiden sich also ausserdem noch in 3 endlichen Punkten, deren Abscissen die Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Wird in Gleichung (1) der Koefficient von x^3 durch Division auf die Einheit gebracht, so wäre auf dem Millimeterpapier nur die einfache Wendeparabel $y = x^3$ notwendig; wird aber der Koefficient von x^2 durch Division auf die Einheit gebracht, so genügt die einfache Pauspapier-Parabel $y = x^2$.

Wie schon in der Einleitung bemerkt, ist dieses Verfahren weniger praktisch als das vorige, da die Schnittpunkte der beiden Parabeln vielfach „lang" werden und häufiger übers Blatt fallen, was einerseits daher rührt, dass beide Kurven demselben ∞fernen Punkt zustrebende Parabeln sind, anderseits daher, dass die Wendeparabel sehr rasch steigt. Desshalb werden diese und die folgenden Lösungen auch nur als in theoretischer Beziehung interessant der Vollständigkeit halber kurz angeführt.

3. Die biquadratische Gleichung.

Die *allgemeine* biquadratische Gleichung

$$(1)\quad x^4 + bx^3 = cx^2 + dx + e \quad \text{oder} \quad \begin{cases} y = cx^2 + dx + e & (2) \\ y = x^4 + bx^3 & (3) \end{cases}$$

erfordert auf dem Millimeterpapier die *trinomische* Parabelschar IV. Ordnung $y = x^4 + bx^3$ in Verbindung mit der Pauspapier-Parabelschar II. Ordnung.

Für die *einfach reducirte* biquadratische Gleichung

$$(4) \qquad x^4 = cx^2 + dx + e$$

ist nur die *binomische* Parabel IV. Ordnung

$$(5) \qquad y = x^4$$

auf dem Millimeterpapier erforderlich.

Die Kurve (5) hat im Wesentlichen dieselbe Gestalt wie die gewöhnliche Parabel $y = x^2$, vom Nullpunkt bis zu den Einheitspunkten (1; 1) und (— 1; 1) hat sie einen flacheren Verlauf als letztere, während sie von diesen Punkten aus rascher ins Unendliche steigt. Ihr charakteristischer Punkt im Ursprung ist ein Flachpunkt mit $y = 0$ als einer 4punktig berührenden Tangente, sie heisse daher *Flachparabel*; im Unendlichen hat dieselbe gemäss der homogenen Form $y\omega^3 = x^4$ einen in der Richtung $x = 0$ liegenden „Spitzpunkt" mit der ∞fernen Geraden $\omega = 0$ als Tangente d. h. einen dreifachen Punkt mit 3 zusammengefallenen Tangenten.

Die allgemeinere Parabel (3) verhält sich im Unendlichen wie die speciellere Parabel (5). Sie verläuft für negative b im zweiten Quadranten analog wie die Flachparabel, tritt im Ursprung mittelst eines Wendepunkts in den vierten Quadranten, erhält in diesem einen zweiten Wendepunkt, dann einen Kulminationspunkt in Beziehung auf die x-Axe, durchschneidet letztere im Punkt (— b; 0) und steigt von diesem Punkt aus im ersten Quadranten wie die Flachparabel ins Unendliche. Aus diesem Bild erhellt sofort für die Kurven (2) und (3) die Möglichkeit von 4 reellen endlichen Schnittpunkten, deren Abscissen die Wurzeln der Gleichung (1) sind, während die 4 übrigen Schnittpunkte beider Kurven im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe vereinigt liegen. Für ein positives b hat die Kurve die Gestalt des Spiegelbilds der vorigen, wenn in der y-Axe der Spiegel senkrecht zur Zeichnungsebene gedacht wird.

Der Ort der Kulminationspunkte der Parabelschar (3) ist die Flachparabel:

$$x^4 + 3y = 0 \qquad \text{oder} \qquad y = -\, {}^1\!/\!_3\, x^4.$$

Die *Hesse*'sche Kurve der Parabel (3) ist:

$$x(2x + b)\,\omega^4 = 0;$$

ihr nicht im Ursprung liegender Wendepunkt liegt also auf der

Geraden $2x + b = 0$. Elimination von b aus dieser Gleichung und der Gleichung (3) giebt als Ort der Wendepunkte der Parabelschar (3) die Flachparabel:

$$y = -x^4.$$

4. Die Gleichung V. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades

$$(1) \quad x^5 + cx^3 = dx^2 + ex + f \quad \text{oder} \quad \begin{cases} y = dx^2 + ex + f & (2) \\ y = x^5 + cx^3 & (3) \end{cases}$$

wird gelöst durch Parallelverschiebung der Pauspapier-Parabelschar $y = dx^2$ über der auf Millimeterpapier gezeichneten *trinomischen* Parabelschar V. Ordnung $y = x^5 + cx^3$.

Für die *zweifach reducirte* Gleichung V. Grades

$$(4) \qquad x^5 = dx^2 + ex + f$$

wäre nur die *binomische* Parabel V. Ordnung:

$$(5) \qquad y = x^5$$

auf dem Millimeterpapier nötig.

Die Kurve (5) hat im Wesentlichen dieselbe Gestalt wie die Wendeparabel $y = x^3$, nur wieder mit flacherem Verlauf vom Nullpunkt bis zu den Einheitspunkten $(1; 1)$ und $(-1; -1)$ und rascherer Steigung von diesen aus ins Unendliche. Ihr charakteristischer Punkt im Ursprung ist ein „Wendeflachpunkt“ mit $y = 0$ als einer 5punktig berührenden Tangente, sie heisse daher *Wendeflachparabel*; im Unendlichen hat dieselbe gemäss der homogenen Form $y\omega^4 = x^5$ einen parabolischen „Rückkehrspitzpunkt“ d. h. einen vierfachen Punkt mit 4 mit der ∞fernen Geraden zusammenfallenden Tangenten.

Die allgemeinere Parabel (3) verhält sich im Unendlichen wie die speciellere Parabel (5). Sie kommt wie die Wendeflachparabel im dritten Quadranten aus dem Unendlichen herein, durchschneidet für negative Werte von c die x-Axe im Punkt $(-\sqrt{-c}; 0)$, erhält im zweiten Quadranten einen Kulminationspunkt in Beziehung auf die x-Axe, dann einen Wendepunkt und tritt mittelst eines zweiten Wendepunkts in den vierten Quadranten, erhält in diesem einen dritten Wendepunkt, sodann einen zweiten Kulmi-

nationspunkt und tritt im Punkt $(+\sqrt{-c}; 0)$ in den ersten Quadranten, um von hier wie die Wendeflachparabel ins Unendliche zu verlaufen. Der Nullpunkt ist ein Mittelpunkt für die Kurve. Aus diesem Bild erhellt für die beiden Kurven (2) und (3) wieder unmittelbar die Möglichkeit von 5 reellen endlichen Schnittpunkten, deren Abscissen die Wurzeln der Gleichung (1) sind, während die 5 übrigen Schnittpunkte beider Kurven wieder im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe vereinigt liegen.

Der Ort der Kulminationspunkte der Parabelschar (3) ist die Wendeflachparabel:

$$2x^5 + 3y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\,{}^2/_3 x^5.$$

Die *Hesse*'sche Kurve der Parabel (3) ist:

$$x(10x^2 + 3c)\,\omega^6 = 0;$$

ihre nicht im Nullpunkt liegenden Wendepunkte liegen also auf dem Geradenpaar $10x^2 + 3c = 0$, sind also nur für $c < 0$ reell. Elimination von c aus der letzten Gleichung und der Gleichung (3) giebt als Ort der Wendepunkte der Parabelschar (3) die Wendeflachparabel:

$$7x^5 + 3y = 0 \quad \text{oder} \quad y = -\,{}^7/_3 x^5.$$

Für positive Werte von c werden die nicht im Nullpunkt liegenden Schnittpunkte der Kurve mit der x-Axe, die beiden Kulminationspunkte und die beiden im zweiten und vierten Quadranten liegenden Wendepunkte imaginär; die Kurve hat die Gestalt einer Wendeparabel. Gleichung (1) kann daher für $c > 0$, wie die Gleichung (4), welche dem Fall $c = 0$ entspricht, höchstens 3 reelle Wurzeln haben.

C. Absonderung eines quadratischen Faktors aus drei aufeinanderfolgenden mittleren Gliedern.

1. Die biquadratische Gleichung.

Die *allgemeine* Gleichung IV. Grades

$$\begin{array}{lll} (1) & x^4 + bx^3 + cx^2 + dx = e & \\ \text{oder } (1') & x^4 + x(bx^2 + cx + d) = e & \end{array} \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = bx^2 + cx + d \\ x^4 + xy = e \end{array}\right\} \begin{array}{l} (2) \\ (3) \end{array}$$

erfordert zur Lösung mittelst der Pauspapier-Pa-

rabelschar die *trinomische* Schar IV. Ordnung $x^4 + xy = e$ von hyperbolisch-parabolischen Kurven auf dem Millimeterpapier.

Die Kurven (2) und (3) schneiden sich in 8 Punkten, von denen 4 im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, da die Kurve (3) in diesem Punkt einen hyperbolisch-parabolischen Punkt hat und zwar einen solchen, dessen einer (hyperbolischer) Zweig die Ordinatenaxe als gewöhnliche Asymptote hat und daher von der Parabel (2) im Unendlichen einfach geschnitten wird, während sein anderer (parabolischer) Zweig die ∞ferne Gerade als Rückkehrtangente hat und daher von der Parabel (2) im Unendlichen dreipunktig geschnitten wird; die Abscissen der 4 endlichen Schnittpunkte der Kurven (2) und (3) sind die Wurzeln der Gleichung (1).

2. Die Gleichung V. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades

$$(1)\quad x^5 + cx^3 + dx^2 + ex = f \qquad \text{oder} \qquad \left\{\begin{aligned} y &= cx^2 + dx + e \\ x^5 + xy &= f \end{aligned}\right\} \begin{matrix}(2)\\(3)\end{matrix}$$

$$\text{oder}\quad (1')\quad x^5 + x(cx^2 + dx + e) = f$$

erfordert die *trinomische* Schar V. Ordnung $x^5 + xy = f$ von hyperbolisch-parabolischen Kurven.

Die Kurven (2) und (3) schneiden sich in 10 Punkten, wovon $1 + 4 = 5$ im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, da die Kurve (3) in diesem Punkt einen hyperbolisch-parabolischen Punkt hat, dessen hyperbolischer Zweig wie der der Kurve $x^4 + xy = f$ beschaffen ist, also von der Parabel einfach geschnitten wird, während sein parabolischer Zweig einen Spitzpunkt mit der ∞fernen Geraden als Tangente hat und daher von der Parabel (2) im Unendlichen 4punktig geschnitten wird.

Die soeben angewandte einfach reducirte Gleichung ist durch Reduktion der Originalgleichung entstanden, reducirt man aber die Reciprokalgleichung, so erhält man:

Die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades

$$x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 = f \qquad \text{oder} \qquad \left\{\begin{aligned} y &= bx^2 + cx + d \\ x^5 + x^2y &= f \end{aligned}\right\}$$

$$\text{oder}\quad x^5 + x^2(bx^2 + cx + d) = f$$

erfordert die *trinomische* Schar V. Ordnung $x^5 + x^2y = f$ von hyperbolisch-parabolischen Kurven.

Der hyperbolische Zweig einer Kurve dieser Schar hat die Ordinatenaxe als Rückkehrasymptote, der parabolische Zweig hat die ∞ferne Gerade als Rückkehrtangente, daher hat diese Kurve mit der Parabel $2 + 3 = 5$ Punkte im Unendlichen gemein.

etc. etc.

II. Absonderung eines linearen Faktors.

A. Absonderung eines linearen Faktors aus den zwei höchsten Gliedern der Gleichung.

Dass nicht mit der Absonderung eines linearen, sondern eines quadratischen Faktors begonnen wurde, ist in der Einleitung S. 6 gerechtfertigt. Wie bei der Absonderung eines quadratischen Faktors in Abschnitt I. die graphischen Lösungen mit den quadratischen, bei Absonderung eines kubischen Faktors in Abschnitt III. mit den kubischen Gleichungen beginnen, so wäre bei Absonderung eines linearen Faktors mit den linearen Gleichungen anzufangen; es wird aber genügen, dies der Systematik halber einfach anzuführen; daher:

1. Die quadratische Gleichung.

Die allgemeine quadratische Gleichung lässt sich auf die Form bringen:

$$ax^2 + bx = 1 \quad \text{oder} \quad x(ax + b) = 1 \qquad \text{oder} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ xy = 1 \end{array} \right\}.$$

Zeichnet man also die Hyperbel $xy = 1$ auf Millimeterpapier und bringt ein Lineal in die Lage der Geraden $y = ax + b$, so liest man die Abscissen der Schnittpunkte der Hyperbel und des Lineals als Wurzeln der quadratischen Gleichung ab. Ferner:

Die *allgemeinste* quadratische Gleichung

$$ax^2 + bx = c \quad \text{oder} \quad x(ax + b) = c \qquad \text{oder} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = ax + b \\ xy = c \end{array} \right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe binomische Hyperbel-

schar II. Ordnung, welche zur *Parabelschar*-Lösung der *allgemeinsten* kubischen Gleichung und zur *Parabel*-Lösung der *allgemeinen* kubischen Gleichung nötig ist (cf. S. 25 u. 15).

2. Die kubische Gleichung.

Die *allgemeine* kubische Gleichung

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 &= cx + 1 \\ \text{oder} \quad x^2(ax + b) &= cx + 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= ax + b \\ x^2 y &= cx + 1 \end{aligned} \right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe trinomische Hyperbelschar III. Ordnung, welche zur *Parabelschar*-Lösung der *allgemeinen* biquadratischen Gleichung nötig ist (cf. S. 25).

Die *einfach reducirte* kubische Gleichung *mit sämtlichen Koefficienten*

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 &= d \\ \text{oder} \quad x^2(ax + b) &= d \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= ax + b \\ x^2 y &= d \end{aligned} \right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe binomische Hyperbelschar III. Ordnung, welche zur *Parabel*-Lösung der *einfach reducirten* biquadratischen Gleichung nötig ist (cf. S. 21).

3. Die biquadratische Gleichung.

Die allgemeine biquadratische Gleichung würde zur Lineallösung eine ∞^2-Schar von Hyperbeln erfordern; also:

Die allgemeine graphische *Lineal*-Lösung der *allgemeinen* biquadratischen Gleichung ist nicht möglich.

Die *einfach reducirte* biquadratische Gleichung

$$\begin{aligned} ax^4 + bx^3 &= cx^2 + 1 \\ \text{oder} \quad x^3(ax + b) &= cx^2 + 1 \end{aligned} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{aligned} y &= ax + b \\ x^3 y &= cx^2 + 1 \end{aligned} \right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe trinomische Hyperbelschar IV. Ordnung, welche zur *Parabelschar*-Lösung der *einfach reducirten* Gleichung V. Grades nötig ist (cf. S. 23 u. 24).

4. Die Gleichung V. Grades.

Die allgemeine graphische *Lineal*-Lösung der *einfach reducirten* Gleichung V. Grades ist nicht möglich.

Die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten*

$$ax^5 + bx^4 = x^3 + dx^2 + 1$$
$$\text{oder } x^4(ax + b) = x^3 + dx^2 + 1 \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = ax + b \\ x^4 y = x^3 + dx^2 + 1 \end{array}\right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe quatrinomische Hyperbelschar V. Ordnung, welche zur *Parabelschar*-Lösung der *einfach reducirten* Gleichung VI. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten* nötig ist (cf. S. 31).

Die *zweifach reducirte* Gleichung V. Grades

$$ax^5 + bx^4 = cx^3 + 1$$
$$\text{oder } x^4(ax + b) = cx^3 + 1 \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = ax + b \\ x^4 y = cx^3 + 1 \end{array}\right\}$$

erfordert zur *Lineal*-Lösung dieselbe trinomische Hyperbelschar V. Ordnung, welche zur *Parabelschar*-Lösung der *zweifach reducirten* Gleichung VI. Grades nötig ist (cf. S. 34) u. s. w.

B. Absonderung eines linearen Faktors aus den zwei niedersten Gliedern der Gleichung.

1. Die quadratische Gleichung.

Die *allgemeinste* quadratische Gleichung

$$ax^2 = bx + c \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = bx + c \\ y = ax^2 \end{array}\right\}$$

erfordert zur Lineal-Lösung die binomische Parabelschar $y = ax^2$; bringt man den Koefficienten von x^2 durch Division auf die Einheit, so genügt die einfache Parabel $y = x^2$.

2. Die kubische Gleichung.

Die *allgemeine* kubische Gleichung

$$x^3 + bx^2 = cx + d \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = cx + d \\ y = x^3 + bx^2 \end{array}\right\}$$

erfordert zur Lineal-Lösung die trinomische Parabelschar III. Ordnung $y = x^3 + bx^2$.

Für die *einfach reducirte* kubische Gleichung

$$x^3 = cx + d \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = cx + d \\ y = x^3 \end{array}\right\}$$

braucht man nur die binomische Wendeparabel.

Es ist leicht zu sehen, wie das Verfahren für die höheren Gleichungen sich fortsetzt, ebenso wie die Lösungen sich gestalten, wenn man den linearen Faktor aus den zwei mittleren Gliedern absondert, wobei das Verfahren mit den kubischen Gleichungen beginnt.

III. Absonderung eines kubischen Faktors.

1. Die kubische Gleichung.

Die allgemeine Gleichung III. Grades

$$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \tag{1}$$

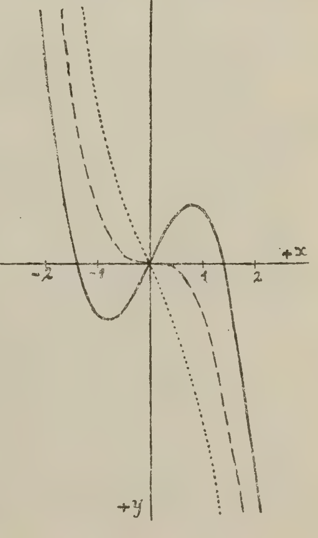
ist das Eliminationsresultat von y aus dem simultanen System:

$$\left.\begin{aligned} &y = x^3 + bx^2 + cx + d \quad (2)\\ &y = 0 \quad (3) \end{aligned}\right\},$$

so dass also die Wurzeln der Gleichung (1) die Abscissen der Durchschnittspunkte der Kurve (2) mit der x-Axe sind.

Nun kann man aber die Kurve (2) betrachten als die parallel verschobene trinomische Parabel

$$y = x^3 + px, \tag{4}$$



welche im Ursprung einen Mittelpunkt hat, der zugleich Wendepunkt mit der Tangente $y = px$ ist und welche für $p < 0$ die Gestalt der in nebenstehender Figur voll ausgezogenen Kurve hat, für $p = 0$ in die gestrichelt gezogene Wendeparabel $y = x^3$ übergeht und für $p > 0$ die Gestalt der punktirt gezogenen Kurve hat; denn verschiebt man die Kurve (4) parallel zu den Koordinatenaxen, so dass ihr Wendepunkt in den Punkt $(\alpha; \beta)$ zu liegen kommt, so lautet ihre Gleichung:

(5) $y-\beta=(x-\alpha)^3+p(x-\alpha)$

oder (5') $y=x^3-3\alpha x^2+(3\alpha^2+p)x+(\beta-\alpha^3-p\alpha)$;

diese giebt mit (2) identificirt

$$\left.\begin{array}{r} -3\alpha=b \\ 3\alpha^2+p=c \\ \beta-\alpha^3-p\alpha=d \end{array}\right\} \text{ woraus } \left\{\begin{array}{l} \alpha=-\frac{b}{3} \\ \beta=d-\frac{bc}{3}+2\left(\frac{b}{3}\right)^3 \\ p=c-\frac{b^2}{3} \end{array}\right\}$$

also: Die Kurve $y=x^3+bx^2+cx+d$ ist die parallel verschobene *trinomische Parabel* $y=x^3+px$; ihr Wendepunkt (Mittelpunkt) liegt im Punkt $\left(-\frac{b}{3};\, d-\frac{bc}{3}+2\left(\frac{b}{3}\right)^3\right)$, ihr Parameter ist $p=c-\frac{b^2}{3}$; sie geht durch den Punkt $(0;d)$.

Zeichnet man daher die trinomische Parabelschar III. Ordnung (4) samt den Koordinatenaxen auf Pauspapier, ferner auf ein Blatt Millimeterpapier ein rechtwinkliges Axenkreuz, so lässt sich mittelst dieses Apparates jede allgemeine *kubische* Gleichung durch Einstellung der *trinomischen Pauspapier-Parabelschar* nach vorstehender Regel in analoger Weise lösen, wie die allgemeine *quadratische* Gleichung in I., A, 1 mit Hilfe der *binomischen Pauspapier-Parabel* gelöst wurde.

Man könnte auch umgekehrt die trinomische Parabelschar auf das Millimeterpapier, das Axenkreuz auf das Pauspapier zeichnen und dieses einstellen.

Anstatt die Parabel (2) mit der Parabel (5') zu vergleichen, könnte man dieselbe auch mit der parallel verschobenen trinomischen Parabel $y=x^3+qx^2$, welche S. 44 zur Lineal-Lösung der kubischen Gleichung verwendet wurde, identificiren.

2. Die biquadratische Gleichung.

Die *allgemeine* biquadratische Gleichung

(1) $x^4+bx^3+cx^2+dx=e$

oder (1') $x(x^3+bx^2+cx+d)=e$

oder $\left\{\begin{array}{ll} y=x^3+bx^2+cx+d & (2) \\ xy=e & (3) \end{array}\right.$

erfordert bei Anwendung der *trinomischen Pauspapier-Parabelschar* $y=x^3+px$ dieselbe Millimeterpapier-Hyperbelschar

$xy = e$, welche oben in Verbindung mit der *binomischen Pauspapier-Parabel* $y = x^2$ die Lösung der *allgemeinen* kubischen Gleichung ergab (cf. S. 15).

Da die Kurve (2) wie die Wendeparabel im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe einen Rückkehrpunkt mit der ∞fernen Geraden als Tangente hat, so fallen 2 von den 6 Schnittpunkten der Kurven (2) und (3) ins Unendliche, die Abscissen der 4 endlichen sind die Wurzeln der Gleichung (1).

3. Die Gleichung V. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung V. Grades

$$(1) \quad x^5 + bx^4 + cx^3 + dx^2 = f \qquad \text{oder} \qquad \left\{ \begin{array}{ll} y = x^3 + bx^2 + cx + d & (2) \\ x^2 y = f & (3) \end{array} \right.$$
$$\text{oder } (1') \quad x^2 (x^3 + bx^2 + cx + d) = f$$

erfordert bei Anwendung der *trinomischen Pauspapier-Parabelschar* $y = x^3 + px$ dieselbe Millimeterpapier-Hyperbelschar $x^2 y = f$, welche in Verbindung mit der *binomischen Pauspapier-Parabel* $y = x^2$ die Lösung der *einfach reducirten* biquadratischen Gleichung ergab (cf. S. 21).

Von den 9 Schnittpunkten der Kurven (2) und (3) fallen 4 in den ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe, so dass wieder die Abscissen der 5 endlichen Schnittpunkte die Wurzeln der Gleichung (1) sind.

4. Die Gleichung VI. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung VI. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten:*

$$x^6 + bx^5 + cx^4 + dx^3 = ex^2 + 1 \qquad \text{oder} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y = x^3 + bx^2 + cx + d \\ x^3 y = ex^2 + 1 \end{array} \right.$$
$$x^3 (x^3 + bx^2 + cx + d) = ex^2 + 1$$

erfordert bei Anwenduug der *trinomischen Pauspapier-Parabelschar* $y = x^3 + px$ dieselbe Millimeterpapier-Hyperbelschar $x^3 y = ex^2 + 1$, welche in Verbindung mit der *binomischen Pauspapier-Parabelschar* $y = ax^2$ die Lösung der *einfach reducirten* Gleichung V. Grades ergab (cf. S. 23).

Von den 12 Schnittpunkten der beiden Kurven fallen diesmal 6 in den ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe.

etc. etc.

IV. Absonderung zweier quadratischer Faktoren.

Dieses Verfahren tritt zum erstenmal bei der allgemeinsten Gleichung V. Grades auf und soll daher an dieser auseinandergesetzt werden, da alsdann seine Ausdehnbarkeit auf die höheren Gleichungen ohne Weiteres einleuchtet. In praxi wird man eine Gleichung V. Grades graphisch-mechanisch stets nach der S. 23 und 24 gegebenen Methode lösen.

1. Die Gleichung V. Grades.

Die allgemeinste Gleichung V. Grades

$$(1) \qquad ax^5 + bx^4 + cx^3 = dx^2 + ex + f$$

oder

$$(1') \qquad x^3(ax^2 + bx + c) = dx^2 + ex + f$$

giebt ersetzt durch das simultane System

$$\begin{aligned} &(2) \qquad & y &= ax^2 + bx + c \\ &(3) \qquad & z &= dx^2 + ex + f \\ &(4) \qquad & x^3y &= z \end{aligned}$$

zu erkennen, dass die Abscissen der Schnittpunkte der drei Flächen (2), (3) und (4) die Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Die Fläche (4) ist eine Regelfläche IV. Ordnung, welche in den den Zeichenkombinationen

$$(+ + +), \quad (+ - -), \quad (- + -), \quad (- - +)$$

entsprechenden Koordinatenräumen liegt. Die

Seiten-	Vertikal-	Horizontalschnitte der Fläche sind:
die *Geradenschar*	d. *Wendeparabelschar*	*binom. Hyperbelsch.**) IV.O.
(5) $\begin{cases} x = \alpha \\ z = \alpha^3 y \end{cases}$	(6) $\begin{cases} y = \beta \\ z = \beta x^3 \end{cases}$	(7) $\begin{cases} z = \gamma \\ x^3 y = \gamma \end{cases}$

Die Fläche, deren homogene Form ist:

$$(4') \qquad x^3y = z\omega^3$$

enthält auch noch die 4 Geraden:

$$\begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} z = 0 \\ x = 0 \end{cases}, \quad \begin{cases} y = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x = 0 \\ \omega = 0 \end{cases}$$

---

*) Die Horizontalprojektion dieser Schar ist oben S. 27 zur Auflösung der zweifach-reducirten Gleichung V. Grades mittelst einfacher binomischer Pauspapier-Parabel verwendet worden.

und zwar die erstere, nämlich die x-Axe, als einfache Gerade, die beiden mittleren, nämlich die y-Axe und die Zenithlinie*) der y-Axe (∞ferne Gerade der zx-Ebene), als Wendegerade, die vierte, nämlich die Zenithlinie der x-Axe, als eine dreifache Gerade.

Da die Geraden der Seitenschnitte alle die x-Axe schneiden und parallel zur yz-Ebene sind, so ist die Regelfläche ein senkrechtes Konoid.

Die Fläche $\left\{ \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \right\}$ ist ein $\left\{ \begin{matrix} \text{horizontal-} \\ \text{vertikal-} \end{matrix} \right\}$ projicirender parabolischer Cylinder II. Ordnung. Beide Cylinder berühren sich in der Zenithlinie $\left\{ \begin{matrix} x = 0 \\ \omega = 0 \end{matrix} \right\}$ der x-Axe; denn aus den homogenen Formen ihrer Gleichungen

$$(2') \quad (y - bx - c)\,\omega = ax^2 \quad \text{und} \quad (z - ex - f)\,\omega = dx^2 \quad (3')$$

folgt, dass beide die ∞ferne Ebene $\omega = 0$ in ihrer Schnittlinie mit $x = 0$ d. h. längs der Zenithlinie der x-Axe berühren; daher schneiden sie sich ausserdem noch nach einem Kegelschnitt, der also eine Parabel II. Ordnung sein muss. Dies folgt auch daraus, dass man durch lineare Kombination der Gleichungen (2) und (3), nämlich durch Elimination des x^2-Gliedes, die Ebene

$$(8) \quad (ae - bd)x + dy - az + (af - cd) = 0$$

erhält, in der die endliche Schnittkurve beider Cylinder liegen muss. — Die Schnittparabel hat als Horizontal- und Vertikalprojektion die beiden Parabeln:

$$(9) \quad \left\{ \begin{matrix} y = ax^2 + bx + c \\ z = 0 \end{matrix} \right\} \quad \text{und} \quad (10) \quad \left\{ \begin{matrix} z = dx^2 + ex + f \\ y = 0 \end{matrix} \right\};$$

ihr ∞ferner Punkt liegt im Schnittpunkt der Ebene (8) mit der ∞fernen Geraden beider Cylinder, d. h. mit der Zenithlinie der x-Axe. Die Fläche (4) wird von der Schnittparabel in $4 \,.\, 2 = 8$ Punkten geschnitten, von denen 3 im ∞fernen Punkt der Parabel liegen, da die Zenithlinie der x-Axe eine dreifach zu zählende Gerade der Fläche (4) ist; die Flächen (2), (3) und (4) haben

*) Zenithlinie einer Geraden = ∞ferne Gerade ihrer Normalebenen cf. des Verfassers „Deck-Elemente“ Stuttgart 1882 S. 1.

also in der That 5 endliche Schnittpunkte gemein, deren Abscissen Wurzeln der Gleichung (1) sind.

Stellt man sich die Fläche (4) und die Parabel im Raum vor, so sieht man leicht, dass sie höchstens 5 endliche Schnittpunkte gemein haben können; man kann sich z. B. denken, dass die Schnittparabel den im $(+++)$-Raum liegenden Teil der Fläche (4) erst zweimal schneidet, sodann in den $(+--)$-Raum sich senkend den in diesem liegenden Teil der Fläche ebenfalls zweimal schneidet, endlich sich wieder in den ersten Raum erhebend die Fläche zum fünftenmal schneidet. Bei einer solchen Lage hätte die Gleichung (1) fünf positive reelle Wurzeln.

Ebenso kann man sich leicht vorstellen, wie die Parabel den im $(+++)$-Raum liegenden Flächenteil einmal, den im $(+--)$- und $(--+)$-Raum liegenden Flächenteil je zweimal schneiden kann; alsdann hätte die Gleichung (1) drei positive und zwei negative reelle Wurzeln und dergl. mehr.

Ist ferner $d=e=0$, liegt also eine zweifach reducirte Gleichung V. Grades vor, so geht der Cylinder (3), ebenso die Ebene (8), in die horizontale Ebene $z=f$ über, die Parabel im Raum hat horizontale Lage; man sieht sofort, dass in diesem Fall nur entweder die zwei oberhalb oder die zwei unterhalb der Horizontalebene liegenden Flächenteile von der Parabel reell geschnitten werden können, so dass die Gleichung höchstens 3 reelle Wurzeln haben kann, in Übereinstimmung mit dem Satz S. 35. Diese Raumlösung deckt sich mit der S. 27 gegebenen Lösung.

Ist aber $b=c=0$, liegt also die andere Form der zweifach reducirten Gleichung V. Grades vor, und nimmt man $a>0$ an, was stets erlaubt ist, so lässt sich dieser Fall mittelst der Reciprokalgleichung auf den vorigen zurückführen, aber auch selbständig so erledigen. Der Cylinder (2) geht über in $y=ax^2$, berührt also die Ebene $y=0$ längs der z-Axe, liegt somit ganz vor der zx-Ebene*); die Parabel im Raum kann daher nur die beiden vor der zx-Ebene liegenden Flächenteile in reellen Punkten schneiden, und zwar, je nach der Lage der Parabel (10), entweder in einem oder in drei reellen Punkten.

*) $+x$ nach rechts, $+y$ nach vorne, $+z$ nach oben gedacht.

Um nun die Wurzeln der Gleichung (1) durch graphisch-mechanische Manipulationen in der Zeichnungsebene bestimmen zu können, denke man sich ein räumliches rechtwinkliges Koordinatensystem, bestehend aus Horizontal- oder xy-Ebene und aus Vertikal- oder zx-Ebene nebst dem Ursprung, klappe die Vertikalebene im Sinne der deskriptiven Geometrie in die Horizontalebene um, alsdann lässt sich in der so entstandenen Zeichnungsebene die Fläche (4) dadurch darstellen, dass man die Horizontalprojektionen $x^3y = \gamma$ der Horizontalschnitte (7) sowie deren geradlinige Vertikalprojektionen $z = \gamma$ für alle möglichen Werte von γ auf das Millimeterpapier aufzeichnet und für je zwei zusammengehörige Projektionen den entsprechenden Wert von γ beischreibt.

Man nehme nun zwei Blätter Pauspapier, welche beide die Parabelschar $y = ax^2$ enthalten (die Parabelschar $z = dx^2$ ist in der Zeichnung dieselbe), und stelle die eine Pauspapier-Parabel als Parabel (9) in der xy-Ebene der Zeichnungsebene, ebenso die zweite Pauspapier-Parabel als Parabel (10) in der zx-Ebene der Zeichnungsebene genau so ein wie früher, wobei das Auge die a-Parabel auf dem ersten Blatt und die d-Parabel auf dem zweiten Blatt festzuhalten hat. Ein Schnittpunkt der drei Flächen projicirt sich nun auf die Horizontalebene als Schnittpunkt der a-Parabel mit einer gewissen Kurve der Schar $x^3y = \gamma$, auf die Vertikalebene als Schnittpunkt der d-Parabel mit der demselben Wert von γ entsprechenden Geraden $z = \gamma$; das Auge hat also nur zu suchen, wo zwei solche Schnittpunkte senkrecht übereinander liegen, alsdann sind die Abscissen dieser Punkte die reellen Wurzeln der gegebenen allgemeinsten Gleichung V. Grades. Somit:

Die *allgemeinste* Gleichung V. Grades

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 = dx^2 + ex + f$$

oder

$$x^3(ax^2 + bx + c) = dx^2 + ex + f \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ z = dx^2 + ex + f \\ x^3y = z \end{array}\right\}$$

wird graphisch-mechanisch gelöst durch Parallelverschiebung zweier auf Pauspapier gezeichneter binomischer Parabelscharen über der auf Millimeterpapier durch Horizontalschnitte dargestellten *binomischen Regelfläche IV. Ordnung* $x^3y = z$.

Für die allgemeine Gleichung V. Grades lässt sich da-

durch, dass man den Koefficienten von x^5 oder x^2 durch Division auf 1 bringt, die eine Parabelschar durch eine einfache Parabel ersetzen.

Eine derartige Raumlösung hat in praxi ihre Schwierigkeiten; immerhin lassen sich noch manche Winke geben, die für die Ausführung von Nutzen sein könnten. So wird man bei der Darstellung der Regelfläche durch ihre Horizontalschnitte nur die hyperbolischen Horizontalprojektionen derselben zeichnen, dagegen ihre geradlinigen Vertikalprojektionen, welche durch die Linien des Millimeterpapiers gegeben sind, weglassen, damit man auf dem Millimeterpapier nicht zwei sich kreuzende Scharen erhält, was für das Auge verwirrend wäre. Würde man die Hyperbelschar $x^3y = \gamma$ mit unauslöschbarer Tinte auf Pergamentmillimeterpapier oder dergl. zeichnen, ferner anstatt der Pauspapier-Parabelschar eine Schar von Parabelschablonen sich anfertigen, so könnte man mittelst letzterer auf das Pergament die a- und die d-Parabel in ihrer durch die übrigen Koefficienten bedingten Stellung für jeden einzelnen Fall mit leicht auswischbarem Bleistift rasch auftragen, und es hätte dann keine Schwierigkeit, die „Wurzelpunkte“ aufzusuchen.

Anstatt die Regelfläche auf dem Millimeterpapier durch ihre Horizontalschnitte darzustellen, kann man sie auch durch ihre Vertikalschnitte, nämlich durch die Wendeparabelschar (6), darstellen, im Übrigen in analoger Weise verfahren wie oben. Diese Parabelschar liefert aber, wie bei den Lösungen in Abschnitt II, ungünstigere Verhältnisse als die Hyperbelschar der Horizontalschnitte.

Endlich kann man die Regelfläche auch durch die Geradenschar (5) ihrer Seitenschnitte darstellen. Die Seitenprojektion dieser Schar ist ein Strahlenbüschel durch den Ursprung, ihre Horizontalprojektion ist eine Parallelenschar zur y-Axe, welche wieder, als durch die Linien des Millimeterpapiers gegeben, wegbleiben kann. Die Zeichnungsebene bestünde aus der xy-Ebene und der in sie umgeklappten yz-Ebene. Als Darstellung der Fläche wäre dies jedenfalls die einfachste. Die Schnittparabel der Cylinder (2) und (3) müsste jetzt durch ihre Horizontalprojektion, wie oben, und ihre Seitenprojektion dargestellt

werden. Für letztere findet man durch Elimination von x aus (2) und (3):

$$\left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ \left[d(y-c) - a(z-f)\right]^2 - (ae-bd)\left[e(y-c) - b(z-f)\right] = 0 \end{array}\right\}$$

Hieraus folgt unmittelbar, dass diese Parabel durch den Punkt $(0; c; f)$ geht, ferner dass ihre Axe die Richtung

$$\left\{\begin{array}{r} x = 0 \\ dy - az = 0 \end{array}\right\}$$

hat, wie sich auch aus der Ebene (8) mit $x = 0$ und $\omega = 0$ ergiebt. Transformirt man die Parabel auf die Form

$$y' = pz'^2,$$

so findet man durch eine kleine Rechnung für ihren Scheitel $(0; \eta; \zeta)$ in Beziehung auf das ursprüngliche System die Werte

$$\left\{\begin{array}{l} \eta = c + \dfrac{ab+de}{4(a^2+d^2)^2}\left[d(ae-bd) - b(a^2+d^2)\right] \\ \zeta = f - \dfrac{ab+de}{4(a^2+d^2)^2}\left[a(ae-bd) + e(a^2+d^2)\right] \end{array}\right\},$$

für ihren Parameter

$$p = \frac{(a^2+d^2)^{3/2}}{(ae-bd)^2},$$

während die Richtung der Axe der Parabel durch die beiden Vorzeichen von a und d und damit auch das Vorzeichen der Quadratwurzel in p bestimmt ist. Wegen der Gleichungen höheren Grades (cf. die folgenden Nummern) können sowohl a als d beliebige Vorzeichen haben.

Mit Hilfe des Scheitels, der Axenrichtung und des Parameters, wozu als Probe noch der Punkt $(0; c; f)$ kommt, lässt sich die Seitenprojektion der Parabel in der Zeichnungsebene einstellen (bezw. einzeichnen); also:

Durch Einstellung zweier binomischer Pauspapier-Parabelscharen II. Ordnung als Horizontal- und Seitenprojektion der Parabel im Raum (oder durch Einzeichnung derselben) über der auf Millimeterpapier durch die Geradenschar ihrer Seitenschnitte dargestellten binomischen Regelfläche IV. Ordnung $x^3y = z$ lässt sich die *allgemeinste* Gleichung V. Grades in analoger

Weise lösen wie bei der Darstellung der Fläche durch ihre Horizontalschnitte.

Während in diesem Fall die Darstellung der Fläche eine sehr einfache ist, ist die Einstellung der Seitenprojektion der Parabel wesentlich komplicirter als bisher.

Wie oben S. 50 die frühere Lösung der zweifach reducirten Gleichung V. Grades als Specialfall der Raumlösung nachgewiesen wurde, so lässt sich auch die S. 24 gegebene Lösung der einfach reducirten Gleichung aus der Raumlösung der allgemeinsten Gleichung ableiten. Zugleich gewinnt man dabei die geometrische Bedeutung der mehrfachen Reduktionen einer Gleichung. Untersuchungen hierüber bleiben einer späteren Abhandlung vorbehalten.

2. Die Gleichung VI. Grades.

Die *allgemeine* Gleichung VI. Grades

$$ax^6 + bx^5 + cx^4 = dx^3 + ex^2 + fx + 1$$
oder $$x^4(ax^2 + bx + c) = x(dx^2 + ex + f) + 1$$ oder $$\left\{\begin{array}{r} y = ax^2 + bx + c \\ z = dx^2 + ex + f \\ x^4 y = xz + 1 \end{array}\right\}$$

wird graphisch-mechanisch gelöst durch Parallelverschiebung zweier auf Pauspapier gezeichneter binomischer Parabelscharen über der auf Millimeterpapier durch Horizontalschnitte dargestellten *trinomischen Regelfläche V. Ordnung* $x^4y = xz + 1$.

In diesem Fall hat die Schnittparabel der 2 Cylinder 4 Punkte im Unendlichen mit der Regelfläche gemein, so dass von den $2 . 5 = 10$ Schnittpunkten 6 im Endlichen liegen, welche die Wurzeln der Gleichung VI. Grades liefern. Analoges gilt für die folgenden Fälle.

Auch hier wie in den nächsten Nummern kann man die Regelfläche durch die Geradenschar

$$\left\{\begin{array}{r} x = \alpha \\ \alpha^4 y - \alpha z = 1 \end{array}\right\}$$

ihrer Seitenschnitte darstellen, im Übrigen bleibt das Verfahren ganz dasselbe wie bei den Gleichungen V. Grades.

Die Seitenprojektion dieser Geradenschar hat als Umhüllungslinie die binomische Flachparabel

$$256y + 27z^4 = 0 \quad \text{oder} \quad y = -27\left(\frac{z}{4}\right)^4. \text{ —}$$

Sondert man die beiden quadratischen Faktoren aus den 3 höchsten und den drei niedersten Gliedern ab, so erhält man an Stelle der obigen Regelfläche die andere

$$x^4y = x^3 + z.$$

3. Die Gleichung VII. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung VII. Grades

$$ax^7 + bx^6 + cx^5 = dx^4 + ex^3 + fx^2 + 1$$

oder $x^5(ax^2 + bx + c) = x^2(dx^2 + ex + f) + 1$ oder $\left\{\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \\ z = dx^2 + ex + f \\ x^5y = x^2z + 1 \end{array}\right\}$

erfordert auf dem Millimeterpapier die Darstellung der *trinomischen Regelfläche VI. Ordnung* $x^5y = x^2z + 1$.

4. Die Gleichung VIII. Grades.

Die *einfach reducirte* Gleichung VIII. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten*

$$ax^8 + bx^7 + cx^6 = x^5 + ex^4 + fx^3 + gx^2 + 1$$

oder $x^6(ax^2 + bx + c) = x^5 + x^2(ex^2 + fx + g) + 1$

erfordert auf dem Millimeterpapier die Darstellung der *quatrinomischen Regelfläche VII. Ordnung* $x^6y = x^5 + x^2z + 1$.

Die Fortsetzung des Verfahrens für die mehrfach reducirten höheren Gleichungen leuchtet ein.

V. Absonderung eines quadratischen und eines linearen Faktors.

Die biquadratische Gleichung.

Die *allgemeinste biquadratische* Gleichung

(1) $ax^4 + bx^3 + cx^2 = dx + e$

oder (1′) $x^2(ax^2 + bx + c) = dx + e$ oder $\left\{\begin{array}{ll} y = ax^2 + bx + c & (2) \\ z = dx + e & (3) \\ x^2y = z & (4) \end{array}\right.$

giebt zu erkennen, dass ihre Wurzeln die Abscissen der Schnittpunkte der drei Flächen (2), (3) und (4) sind.

Die Fläche (4) ist eine Regelfläche III. Ordnung, welche in den den Zeichenkombinationen

$$(+\,+\,+),\quad (-\,+\,+),\quad (+\,-\,-),\quad (-\,-\,-)$$

entsprechenden, d. h. in den zwei oberen vorderen und den zwei unteren hinteren, Koordinatenräumen liegt. Die

Seiten-	Vertikal-	Horizontalschnitte der Fläche sind:
die *Geradenschar*	*bin. Parabelschar* II.	*binom. Hyperbelschar* III. O.
$\begin{cases} x = \alpha \\ z = \alpha^2 y \end{cases}$	$\begin{cases} y = \beta \\ z = \beta x^2 \end{cases}$	$\begin{cases} z = \gamma \\ x^2 y = \gamma \end{cases}$.

An Stelle des vertikalprojicirenden Cylinders in Abschnitt IV tritt hier die vertikalprojicirende Ebene (3), welche den horizontalprojicirenden Cylinder (2) nach einer Parabel schneidet. Letztere hat mit der Regelfläche $2 . 3 = 6$ Schnittpunkte gemein, von denen diesmal nur 2 im Unendlichen liegen, da die Zenithlinie der x-Axe als Doppelgerade der Regelfläche $x^2 y = z\omega^2$ aufzufassen ist, so dass die Abscissen der 4 endlichen Schnittpunkte die Wurzeln der Gleichung (1) sind. Stellt man sich die Regelfläche im Raum vor, so überzeugt man sich wieder leicht, dass dieselbe von der Raumparabel in 4 reellen Punkten geschnitten werden kann. Auch sieht man, wie mit $d = 0$ die Raumlösung in die im Abschnitt I gegebene Lösung übergeht.

Bei der graphisch-mechanischen Ausführung wird die in der zx-Ebene der Zeichnungsebene einzustellende Parabelschar des vorigen Abschnitts durch eine einzustellende Gerade (Lineal) ersetzt.

Bei der Darstellung der Regelfläche durch die Geradenschar ihrer Seitenschnitte erhält man durch Elimination von x aus (2) und (3) für die Seitenprojektion der Raumparabel

$$a(z-e)^2 + bd(z-e) = d^2(y-c),$$

oder indem man die z-Glieder zu einem vollständigen Quadrat ergänzt:

$$\left(y - c + \frac{b^2}{4a}\right) = \frac{a}{d^2}\left[z - e + \frac{bd}{2a}\right]^2;$$

also eine Parabel mit der Axenrichtung der positiven y-Axe, mit Scheitel $\left(0;\ c - \frac{b^2}{4a};\ e - \frac{bd}{2a}\right)$ und Parameter $\frac{a}{d^2}$. Dieselben Werte erhält man aus den Formeln für η, ζ und p auf S. 53, wenn

man dort d, e, f durch 0, d, e ersetzt. In diesem Fall wäre also die Einstellung der Seitenprojektion der Parabel fast so einfach als die der Horizontal- und Vertikalprojektion, so dass man mit Vorteil die letztere Darstellung der Regelfläche benützen könnte.

Es ist leicht zu sehen, wie dieses Verfahren auf die *allgemeine* Gleichung V., die *einfach reducirte* Gleichung VI., die *einfach reducirte* Gleichung VII. Grades *mit 2 Einheitskoefficienten* und die mehrfach reducirten höheren Gleichungen sich ausdehnt.

Es möge noch kurz erwähnt sein, dass bei Absonderung zweier linearer Faktoren aus zwei Gruppen von je 2 aufeinanderfolgenden Gliedern die Parabel im Raum durch eine Raumgerade, die beiden Pauspapier-Parabelscharen durch zwei einzustellende Lineale ersetzt werden, und dass die Lösungen dann mit der allgemeinsten Gleichung III. Grades beginnen.

VI. Absonderung eines kubischen und eines quadratischen Faktors.

Sondert man einen kubischen und einen quadratischen Faktor ab, so tritt an Stelle der ebenen Parabel im Raum eine kubische Parabel; nämlich:

Die allgemeine Gleichung VI. Grades

$$(1)\quad x^3(x^3 + bx^2 + cx + d) = ex^2 + fx + g$$

kann ersetzt werden durch das simultane System

$$\left.\begin{array}{lr} (2) & y = x^3 + bx^2 + cx + d \\ (3) & z = \qquad ex^2 + fx + g \\ (4) & x^3 y = z \end{array}\right\}.$$

Die beiden projicirenden Cylinder (2) und (3) haben die Zenithlinie der x-Axe als dreifach zu zählende Gerade gemeinschaftlich, denn mit der ∞fernen Ebene steht der Cylinder (3) längs dieser Geraden in gewöhnlicher Berührung, der Cylinder (2) hat in dieser Geraden eine Rückkehrmantellinie; daher schneiden

sich die Cylinder ausserdem nach einer Raumkurve III. Ordnung, wie sich auch durch Elimination des x^3-Gliedes aus (2) und (3) ergiebt, denn dadurch erhält man die Regelfläche II. Ordnung

$$[(be - f)x + z]x = [(g - ce)x + ey - de]\,\omega,$$

welche mit dem Cylinder (3) die Zenithlinie der x-Axe gemein hat. Die Raumkurve III. Ordnung ist eine kubische Parabel, da ihre Horizontalprojektion eine Parabel III., ihre Vertikalprojektion eine Parabel II. Ordnung ist; sie berührt die Zenithlinie der x-Axe im ∞fernen Punkt der y-Axe (im Zenith der Vertikalebene) und hat daher in diesem Punkt $2 . 3 = 6$ Punkte mit der Regelfläche (4) gemein, da diese Zenithlinie eine dreifache Gerade der Fläche (4) ist. Von den $3 . 4 = 12$ Schnittpunkten der kubischen Parabel mit dem Konoid (4) liegen also 6 im Endlichen, ihre Abscissen sind die Wurzeln der Gleichung (1). Also:

Die *allgemeine* Gleichung VI. Grades erfordert zur Lösung mittelst der *trinomischen Pauspapier-Parabelschar* $y = x^3 + px$ und der *binomischen Pauspapier-Parabelschar* $z = ex^2$ die Darstellung derselben binomischen Regelfläche $x^3y = z$, welche mittelst *zweier binomischer Pauspapier-Parabelscharen* die Lösung der *allgemeinsten* Gleichung V. Grades ergab (cf. S. 51).

Sondert man aber den quadratischen Faktor aus den 3 höchsten, den kubischen aus den 4 niedersten Gliedern ab, so wird die Regelfläche $x^4y = z$, also von der V. Ordnung; sie wird von der kubischen Parabel, deren ∞ferner Punkt diesmal im Zenith der Horizontalebene liegt, in 15 Punkten geschnitten. Von diesen Punkten liegen $2 . 4 + 1 = 9$ im Unendlichen, da die Zenithlinie der x-Axe eine vierfache Gerade des Konoids ist und die kubische Parabel auch die auf dem Konoid liegende Zenithlinie der y-Axe einmal schneidet, so dass wieder 6 endliche Schnittpunkte übrig bleiben.

Anhang.

Die defekten Gleichungen.

Bei mathematischen Problemen kommen häufig, z. B. bei vielen hydrodynamischen Aufgaben, defekte Gleichungen höheren Grades vor, welche sich leicht graphisch-mechanisch behandeln lassen. Man braucht hiezu nur die betreffenden Gleichungen durch ein geeignetes simultanes System zweier Kurvengleichungen zu ersetzen und die entsprechenden Kurven auf Millimeterpapier und Pauspapier zu zeichnen. Für öfter vorkommende höhere Gleichungen von ein und derselben Form wird es für den Praktiker von Vorteil sein, die zu ihrer Lösung nötigen Kurventafeln sich anzufertigen.

Sieht man von den Raumlösungen ab, so sind von den defekten Gleichungen einer allgemeinen graphisch-mechanischen Lösung fähig ausser den binomischen Gleichungen:

1) Die *trinomischen* Gleichungen

$$x^m + \beta x^n = \gamma \qquad (m > n).$$

Beispielsweise sind trinomisch: Die *allgemeine* quadratische, die *einfach reducirte* kubische, die *zweifach reducirte* biquadratische, die *dreifach reducirte* Gleichung V. Grades u. s. w. (und zwar ist hiebei $n = 1$ oder $= m - 1$, je nachdem man die Reduktion an der Originalgleichung oder ihrer Reciprokalgleichung vornimmt); ferner die *quadratisch-quadratische* d. h. die in x^2 quadratische Gleichung u. s. w.

2) Die *quatrinomischen* Gleichungen

$$x^m + \beta x^n + \gamma x^p = \delta \qquad (m > n > p).$$

Beispielsweise sind quatrinomisch: Die *allgemeine* kubische, die *einfach reducirte* biquadratische, die *zweifach reducirte* Gleichung V., die *dreifach reducirte* Gleichung VI. Grades u. s. w., die *quadratisch-kubische*, d. h. die in x^2 kubische Gleichung u. s. w.

3) Die *quintinomischen* Gleichungen *mit 2 Einheitskoefficienten*

$$x^m + \beta x^n + \gamma x^p = \delta x^q + 1 \qquad (m > n > p > q).$$

Als Beispiel für die graphisch-mechanische Behandlung einer höheren trinomischen Gleichung diene die bei einer hydrodynamischen Aufgabe vorkommende Gleichung:

$$(1) \qquad x^6 + \beta x = \gamma,$$

welche zwei graphisch-mechanische Lösungen zulässt.

I. Lösung. Bringt man die Gleichung auf die Form

$$(1') \quad x(x^5 + \beta) = \gamma \quad \text{oder} \quad \begin{matrix} (2) \\ (3) \end{matrix} \left\{ \begin{matrix} y - \beta = x^5 \\ xy = \gamma \end{matrix} \right\},$$

so erkennt man ihre Wurzeln als Abscissen der Schnittpunkte der Kurven (2) und (3).

Die Kurve (2) ist die parallel zur Ordinatenaxe verschobene binomische Wendeflachparabel $y = x^5$ (cf. S. 39). Also:

Zeichnet man die Wendeflachparabel $y = x^5$ samt den Koordinatenaxen auf Pauspapier und stellt dieselbe über der auf Millimeterpapier gezeichneten binomischen Hyperbelschar $xy = \gamma$ so ein, dass ihr Wendeflachpunkt im Punkt $(0; \beta)$ liegt, und dass die beiden Ordinatenaxen sich decken, so sind die Abscissen ihrer Schnittpunkte mit der γ-Hyperbel die Wurzeln der obigen Gleichung.

Die beiden Kurven (2) und (3) schneiden sich in 10 Punkten, von denen wegen des ∞fernen Rückkehrspitzpunkts der ersteren 4 im ∞fernen Punkt der Ordinatenaxe liegen, die übrigen 6 endlichen Schnittpunkte sind die Wurzeln der Gleichung (1), von diesen sind aber höchstens 2 reell, wie man graphisch sofort ersieht,

wenn man das Pauspapier auf dem Millimeterpapier in der eben angegebenen Weise verschiebt. Weiter erkennt man auf graphischem Weg:

a) Ist $$\gamma > 0,$$
so liegen die Hyperbeln im ersten und dritten Quadranten, beide Zweige werden von der Parabel je einmal reell geschnitten, die Gleichung (1) hat also stets eine positive und eine negative reelle Wurzel, von denen ihrem absoluten Werth nach die $\left\{\begin{matrix}\text{positive}\\ \text{negative}\end{matrix}\right\}$ Wurzel die grössere ist, je nachdem $\beta \lesseqgtr 0$.

b) Ist $$\gamma < 0,$$
so liegen die Hyperbeln im vierten und zweiten Quadranten (Drehung des Millimeterpapiers um 90^0), die Parabel schneidet zweimal reell entweder den einen Zweig oder den andern, oder sie läuft zwischen beiden Zweigen durch.

Bildet man daher die Diskriminante der Gleichung (1), indem man die Gleichung erst auf die homogene Form
$$x^6 + \beta x \xi^5 - \gamma \xi^6 = 0$$
bringt, woraus durch Differentiation nach x und ξ mit $\xi = 1$ als Bedingung für eine Doppelwurzel sich ergiebt:
$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= 6x^5 + \beta = 0 \\ \frac{\partial}{\partial \xi} &= 5\beta x - 6\gamma = 0 \end{aligned}\right\}, \quad \text{oder} \quad \left\{\begin{aligned} x^5 + \frac{\beta}{6} &= 0 \\ \left(\frac{\beta}{6}\right)^5 x^5 - \left(\frac{\gamma}{5}\right)^5 &= 0 \end{aligned}\right\},$$
$$\text{oder} \quad \left(\frac{\beta}{6}\right)^6 + \left(\frac{\gamma}{5}\right)^5 = 0,$$
so kann man graphisch weiter folgendes ableiten. Stellt man die Parabel so, dass sie eine der Hyperbeln im vierten Quadranten berührt, die Gleichung also eine Doppelwurzel hat, so bekommt die Gleichung, wenn β konstant bleibt, 2 reelle getrennte oder 2 imaginäre Wurzeln, je nachdem der absolute Wert des negativen γ ab- oder zunimmt, im ersten Fall wird der Wert der Diskriminante positiv, im zweiten negativ; also:

Je nachdem für negative γ
$$\left(\frac{\beta}{6}\right)^6 + \left(\frac{\gamma}{5}\right)^5 \gtreqless 0$$
hat die Gleichung (1) ausser 4 stets imaginären Wurzeln 2

$\left\{\begin{array}{l}\text{reelle getrennte und gleichzeichige} \\ \text{reelle zusammenfallende} \\ \text{imaginär konjugirte}\end{array}\right\}$ Wurzeln, und zwar sind die beiden reellen Wurzeln $\left\{\begin{array}{l}\text{positiv} \\ \text{negativ}\end{array}\right\}$, je nachdem $\beta \lesseqgtr 0$ ist. —

In analoger Weise liesse sich auch graphisch leicht ermitteln, was ein positiver oder negativer Wert der Diskriminante für die allgemeinen Gleichungen III. und höheren Grades über die Beschaffenheit der Wurzeln aussagt.

II. Lösung. Ersetzt man aber die Gleichung (1) durch

$$\begin{array}{ll}(4) & \left\{\begin{array}{r} y + \beta x = \gamma \\ y = x^6 \end{array}\right\}, \\ (5) & \end{array}$$

so erkennt man ihre Wurzeln als Schnittpunkte der Kurve (5) mit der Geraden (4).

Die Kurve (5) ist eine höhere binomische Flachparabel von der VI. Ordnung, deren Tangente $y = 0$ im Ursprung in 6punktiger Berührung mit der Kurve steht; sie hat im Wesentlichen dieselbe Gestalt wie die gewöhnliche Parabel $y = x^2$ und die Flachparabel IV. Ordnung $y = x^4$ (vgl. S. 38), nur wieder mit noch flacherem Verlauf vom Nullpunkt bis zu den Einheitspunkten (1; 1) und (— 1; 1) und noch rascherer Steigung von diesen aus ins Unendliche. Also:

Zur graphischen Lösung der Gleichung $x^6 + \beta x = \gamma$ stelle man über der auf Millimeterpapier gezeichneten Flachparabel VI. Ordnung $y = x^6$ ein Lineal als Gerade $y + \beta x = \gamma$ ein und lese die Abscissen der Schnittpunkte der Kurve und des Lineals als Wurzeln der Gleichung ab.

Wegen der raschen Steigung der in diesen beiden Lösungen verwendeten Parabeln $y = x^5$ und $y = x^6$ wird es sich empfehlen, wieder mehrere Exemplare dieser Kurven anzufertigen, indem man die Ordinaten in verschiedenem Massstab aufträgt (cf. S. 18).

In ganz analoger Weise lässt sich die allgemeine trinomische Gleichung graphisch-mechanisch behandeln, wobei die nach dem

Schema der ersten für die obige Gleichung VI. Grades gegebenen Lösung als bessere Schnittpunkte liefernd den Vorzug verdient, nämlich:

Die Wurzeln der allgemeinen *trinomischen* Gleichung

$$x^m + \beta x^n = \gamma \qquad \text{oder} \qquad \left\{ \begin{array}{l} y - \beta = x^{m-n} \\ x^n y = \gamma \end{array} \right\}$$
$$\text{oder} \quad x^n (x^{m-n} + \beta) = \gamma$$

sind die Abscissen der Schnittpunkte der γ-Hyperbel der binomischen Millimeterpapier-Hyperbelschar $(n+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $x^n y = \gamma$ und der parallel zur Ordinatenaxe in den Punkt $(0; \beta)$ zu verschiebenden *binomischen* Pauspapier-Parabel $(m-n)^{\text{ter}}$ Ordnung $y = x^{m-n}$.

Je nachdem die Hyperbel, ebenso die Parabel gerader oder ungerader Ordnung ist, erhält man 4 Hauptfälle, welche sich in Unterfälle teilen je nach dem Vorzeichen von β und γ.

Bezeichnet man das Symbol $[m, n]$ als Charakteristik der trinomischen Gleichung und sagt man statt „trinomische Gleichung mit der Charakteristik $[m, n]$“ kurz „*trinomische Gleichung* $[m, n]$“, so findet man auf graphischem Weg durch Betrachtung der erwähnten Fälle leicht folgende 4 Sätze:

1) Die trinomische Gleichung $[2m, 2n+1]$ verhält sich in Beziehung auf ihre reell sein könnenden Wurzeln wie die einfachste trinomische Gleichung $[2, 1]$ dieser Art d. h. wie die allgemeine quadratische Gleichung.*)

2_a) Die trinomische Gleichung $[2m+1, 2n+1]$ verhält sich in Beziehung auf ihre reell sein könnenden Wurzeln wie die einfachste trinomische Gleichung $[3, 1]$ dieser Art d. h. wie die einfach reducirte kubische Gleichung mit verschwindendem x^2-Glied.

2_b) Die trinomische Gleichung $[2m+1, 2n]$ wie die einfachste trinomische Gleichung $[3, 2]$ dieser Art d. h. wie die einfach reducirte kubische Gleichung mit verschwindendem x-Glied.

---

*) Dieser Ausdruck soll besagen: Die trinomische Gleichung $[2m, 2n+1]$ hat wie eine quadratische Gleichung höchstens 2 reelle Wurzeln, letztere können, je nach dem Wert der Diskriminante, reell und getrennt, reell und zusammenfallend oder imaginär konjugirt sein; analog in den 3 folgenden Fällen.

3) Die trinomische Gleichung $[2m, 2n]$ wie die einfachste trinomische Gleichung $[4, 2]$ dieser Art d. h. wie die quadratisch-quadratische Gleichung.

Die Sätze sind durch den Umstand begründet, dass alle binomischen Hyperbeln gerader Ordnung, ebenso die ungerader Ordnung, abgesehen davon, dass mit der höheren Ordnung ihr charakteristischer Punkt und ihr singulärer Punkt ein höherer wird, im Wesentlichen gleiche Gestalt haben, und dass dasselbe für die binomischen Parabeln gerader wie ungerader Ordnung gilt.

Die graphische Lösung einer quatrinomischen Gleichung ist durch den Satz gegeben:

Die Wurzeln der allgemeinen *quatrinomischen* Gleichung

$$\begin{array}{ll} & x^m + \beta x^n + \gamma x^p = \delta \\ \text{oder} & x^p(x^{m-p} + \beta x^{n-p} + \gamma) = \delta \end{array} \quad \text{oder} \quad \left\{ \begin{array}{l} y - \gamma = x^{m-p} + \beta x^{n-p} \\ x^p y = \delta \end{array} \right\}$$

sind die Abscissen der Schnittpunkte der δ-Hyperbel der binomischen Millimeterpapier-Hyperbelschar $(p+1)^{\text{ter}}$ Ordnung $x^p y = \delta$ und der β-Parabel der parallel zur Ordinatenaxe in den Punkt $(0; \gamma)$ zu verschiebenden *trinomischen* Pauspapier-Parabel $(m-p)^{\text{ter}}$ Ordnung $y = x^{m-p} + \beta x^{n-p}$.

In Betreff der quatrinomischen Gleichungen $[m, n, p]$, wobei 8 Hauptfälle zu unterscheiden sind, je nachdem die Exponenten m, n und p gerade oder ungerade sind, lassen sich ganz analoge Sätze wie für die trinomischen Gleichungen aufstellen.

Druck der J. B. Metzlerschen Buchdruckerei in Stuttgart.



